
AGRADECIMENTOS

Gostaria de externar meus mais sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. José Sotelo Júnior não somente pela orientação, pelas considerações de grande relevância e pela paciência, mas também pelo constante incentivo ao longo de todo este trabalho.

SUMÁRIO

1. Introdução	1
2. Modelagem do Sistema	6
2.1. MODELAGEM DO SISTEMA EM MALHA ABERTA	6
2.1.1. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO	6
2.1.2. DETERMINAÇÃO DO MODELO DE DIMENSÃO FINITA	7
2.2. MODELAGEM DO SISTEMA EM MALHA FECHADA	12
2.2.1. EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO	12
2.2.2. DETERMINAÇÃO DO MODELO DE DIMENSÃO FINITA	13
2.2.3. ANALOGIA COM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS	18
2.2.4. ANÁLISE DE OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE	19
2.2.5. PROJETO DO CONTROLADOR	21
3. Aparato de Testes	33
3.1. PARTE ESTRUTURAL	33
3.2. PARTE ELETRÔNICA	36
3.2.1. ANÁLISE DOS FILTROS	36
3.3. CONSIDERAÇÕES SOBRE O COMBUSTÍVEL	37
4. Testes	39
5. Conclusões e Estudo Futuro	40
Referências Bibliográficas	41
Anexo 1 - Modelagem do Sistema com Atraso	43

ÍNDICE DE FIGURAS

- Figura 1.1** - Diagrama esquemático simplificado de um sistema de controle para supressão de vibrações termoacústicas em uma câmara de combustão. 4
- Figura 2.1** - Instabilidade termoacústica em um sistema de combustão. 11
- Figura 2.2** - Gráfico do determinante da matriz de observabilidade em função da posição do sensor. Valores não nulos indicam que o sistema é observável e valores nulos indicam que o sistema não é observável. Valor da abscissa é $10x_s/L$, onde L é o comprimento da câmara. 20
- Figura 2.3** - Gráfico do determinante da matriz de observabilidade em função da posição do sensor. Valores não nulos indicam que o sistema é controlável e valores nulos indicam que o sistema não é controlável. Valor da abscissa é $10x_a/L$, onde L é o comprimento da câmara. 20
- Figura 2.4** - Gráfico do lugar das raízes para o sistema de combustão não controlado. 22
- Figura 2.5** - Resposta do sistema em malha aberta a um degrau na entrada. 22
- Figura 2.6** - Diagrama de blocos do sistema em malha aberta. 23
- Figura 2.7** - Diagrama de blocos do sistema controlado com degrau unitário como perturbação. 24
- Figura 2.8** - Resposta do sistema de combustão em malha fechada com degrau unitário como perturbação. 24
- Figura 2.9** - Diagrama de Blocos de um Sistema de Controle Adaptativo com Modelo de Referência. 25
- Figura 2.10** - Diagrama de Blocos de um Sistema de Controle Adaptativo Direto Simulado no Simulink. 30
- Figura 2.11** - Gráfico da resposta do sistema de controle adaptativo direto com modelo de referência com sinal de entrada igual a um trem de pulsos. 31

Figura 2.12 - Gráfico do sinal de atuação $u(t)$.	31
Figura 2.13 - Gráfico do sinal de erro entre as saídas ideal e real.	32
Figura 2.14 - Parâmetros do controlador. Notar que os ganhos do controlador convergem para os ganhos corretos partindo de valores nulos.	32
Figura 3.1 - Modelo tridimensional da câmara de combustão a ser construída (fora de escala).	33
Figura 3.2 - Diagrama esquemático do sistema de alimentação de ar e combustível.	34
Figura 3.3 - Desenho de fabricação da câmara de queima.	34
Figura 3.4 - Desenho de fabricação da câmara de mistura.	35
Figura 3.5 - Desenho de fabricação da câmara de resfriamento.	35
Figura 3.6 - Desenho de conjunto da câmara montada.	35
Figura 3.7 - Modelo renderizado da câmara de combustão.	35
Figura 3.8 - Diagrama de blocos do sistema eletrônico de controle.	36
Figura 3.9 - Diagrama de blocos dos filtros 1 e 2 (Sallen Key de 2ª ordem).	36
Figura 4.1 - Resposta do sistema físico em malha aberta. Oscilação corresponde a um ciclo limite.	39
Figura a.1 - Diagrama esquemático da geometria do modelo.	43

1. INTRODUÇÃO

O domínio do fogo pelo homem é muitas vezes tido como o início da tecnologia, uma vez que o controle do fogo permitiu ao homem maior conforto no inverno, assar a carne de animais e trabalhar os metais possibilitando a fabricação de armas para caçar e fazer a guerra. O fogo sempre foi importante em todas as civilizações humanas tendo sido muitas vezes considerado como um deus. Hoje o controle do fogo tem uma conotação inteiramente nova e é neste contexto moderno que se enquadra este trabalho.

Este trabalho tem como meta o desenvolvimento de um sistema de controle de chama, com um objetivo muito mais nobre do que simplesmente demonstrar que cada vez mais o homem consegue moldar o comportamento da natureza à sua vontade. O objetivo deste controle é melhorar a eficiência do processo de combustão para torná-lo mais econômico e menos poluente.

Antes de se aprofundar nos benefícios advindos do uso de controle ativo sobre uma chama cabe uma breve explanação sobre o consumo de energia pela civilização.

Hoje a principal forma de energia consumida pelas indústrias e residências é a energia elétrica. Isto se deve ao fato desta ser uma das formas de energia que se pode transmitir com maior eficiência. A fonte de energia que é convertida em energia elétrica para ser utilizada nos setores secundário e terciário varia de país para país.

No Brasil, a quase totalidade da energia é gerada em hidroelétricas. Isto se deve a existência no território nacional de um grande número de bacias fluviais cujas características de topografia e perenidade permitiu sua exploração. Entretanto devido ao crescimento do parque industrial nacional, bem como dos setores de serviços e residencial, poderá haver uma crise energética nos próximos anos se a geração de energia elétrica não sofrer incrementos que satisfaçam às crescentes necessidades do país.

Pode-se, inicialmente, considerar duas soluções plausíveis como possíveis soluções desta alarmante questão para o desenvolvimento nacional: o aproveitamento do potencial hidroelétrico das bacias amazônicas ainda não

totalmente explorado ou a construção de termoeletricas. Ambas as soluções apresentam vantagens e desvantagens.

Devido a forma característica com que ocorreu, o desenvolvimento do parque industrial nacional, essencialmente concentrado no sudeste do país, faz com que o aproveitamento do potencial hidroelétrico das bacias amazônicas seja antieconômico, uma vez que haveriam grandes perdas na transmissão da energia, pois a distância entre o fornecimento e o consumo é muito grande. Acrescente-se a isto o elevado custo de construção de um grande número de torres de transmissão. A vantagem mais marcante da hidreletricidade é a não emissão de poluentes, embora também existam não poucos problemas ambientais decorrentes da construção de barragens.

Por outro lado, a construção de termoeletricas apresenta como principal inconveniente o fato de elas serem poluentes, devido a queima de combustível (geralmente fóssil) produzindo CO_2 (que acredita-se provoca o efeito estufa), NO_x e SO_x (ambos responsáveis pelas chuvas ácidas, devido a conversão, na atmosfera, a ácido nítrico e sulfúrico, respectivamente). A viabilidade econômica da construção de termoeletricas, principalmente se houver incentivos fiscais por parte do governo, faz com que esta alternativa seja atraente.

É com o intuito de apresentar soluções técnicas que possibilitem minimizar os impactos ambientais e os custos de operação e manutenção decorrentes da construção de centrais termoeletricas para geração de energia elétrica que se propõe este trabalho de formatura.

Tendo o exposto acima como motivação para o desenvolvimento deste trabalho e com base nos conhecimentos adquiridos ao longo do curso de engenharia mecatrônica desenvolve-se um sistema para controle ativo de instabilidades termoacústicas em sistemas de combustão.

Chamas em câmaras de combustão muitas vezes apresentam instabilidades termoacústicas que possuem muitas características indesejáveis, como produzir oscilações de grande amplitude no escoamento e vibrações mecânicas em vários componentes do sistema, podendo provocar falhas por fadiga, aumentar o consumo de combustível e, algumas vezes, derretimento de componentes.

As características dos processos envolvidos são muito complexas e são produto da interação de diversos fenômenos físicos diferentes tais como mecânica dos fluidos, transferência de calor, cinética química, acústica e turbulência. O sistema é de parâmetros distribuídos implicando a descrição dos fenômenos por meio de equações diferenciais parciais.

O fenômeno de instabilidade termoacústica é estudado desde o século XIX, quando um elevado número de estudos conduzidos de forma independente mostraram que som de considerável amplitude pode ser produzido instalando-se uma chama gasosa no interior de um tubo. Em especial os trabalhos de Lorde Rayleigh forneceram um critério que determina em que condições o acoplamento dinâmico entre a liberação de calor e a pressão se torna instável promovendo deste modo um crescimento ressonante das oscilações de pressão. O critério de Rayleigh tem sido uma ferramenta analítica importante para prever este tipo de instabilidade.

Tradicionalmente, são utilizados métodos passivos de controle para minimizar os efeitos de instabilidade como, por exemplo, mudando-se a localização da chama, o mecanismo de queima, as condições de contorno acústicas e instalando-se abafadores e amortecedores acústicos. A principal razão para o interesse em se empregar técnicas de controle ativo em sistemas de combustão para prover estabilidade reside na necessidade de se trabalhar em várias condições de operação, sem riscos de autodestruição e mantendo baixos os índices de poluentes (em especial o NO_x).

O estudo de controle ativo de instabilidades termoacústicas bem como da emissão de poluentes tem sido alvo de intensa pesquisa. O controle ativo permite que se contorne os antagonismos que geralmente aparecem quando se utilizam técnicas passivas de controle como por exemplo diminuição das oscilações de pressão acarretam num aumento da emissão de poluentes. O controle passivo não é adequado para mudança das condições de operação, isto indica que quando se necessita de um sistema versátil deve-se empregar técnicas ativas e adaptativas de controle.

Os principais objetivos a serem atingidos pelo sistema de controle são a diminuição das oscilações de pressão, a diminuição da emissão de poluentes e o aumento da liberação de calor. A diminuição das oscilações de pressão melhora a performance do sistema e prolonga a vida útil deste, o aumento da liberação de calor permite a redução do tamanho da câmara de combustão e

economia de combustível, e a diminuição da emissão de poluentes diminui os impactos ambientais decorrentes da queima de combustível. Portanto, a capacidade de atingir simultaneamente estes requisitos possibilita a construção de plantas de potência de menores dimensões (menores custos de mão de obra e de matéria-prima), com maior vida útil (menores custos de manutenção).

Um diagrama esquemático simplificado de um sistema de controle para supressão de vibrações termoacústicas em uma câmara de combustão é mostrado na Figura 1.1.

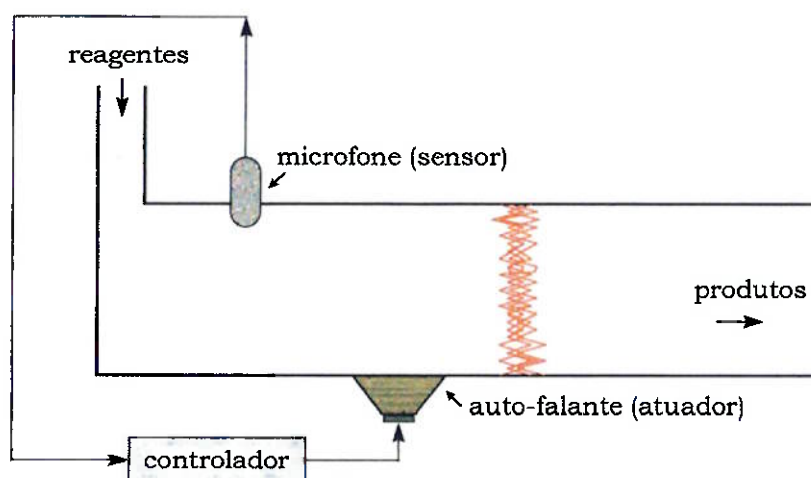


Figura 1.1 - Diagrama esquemático simplificado de um sistema de controle para supressão de vibrações termoacústicas em uma câmara de combustão.

Este sistema se constitui de um microfone que atua como transdutor de pressão. O sinal elétrico proveniente do microfone é processado de modo a produzir um novo sinal elétrico que, enviado para o alto-falante, altera o campo acústico da câmara de combustão, modificando suas características dinâmicas convenientemente.

Se a largura do duto for suficientemente pequena, de forma que as frequências de ondas transversais sejam muito maiores que as das longitudinais, pode-se utilizar um alto-falante na transversal (como mostrado na figura) para excitar as frequências longitudinais.

Para se efetuar o controle ativo de um sistema dinâmico complexo, como é o caso do processo de combustão, é necessário desenvolver uma profunda compreensão dos mecanismos fundamentais que governam a performance do sistema, bem como da interação entre eles. Deve-se também saber como o

sistema responde a entradas externas que podem ser moduladas. Este procedimento implica o levantamento da função de transferência do sistema. O passo seguinte consiste no projeto do laço de controle que faça com que o sistema atinja a performance desejada.

Num sistema de combustão, o entendimento dos complexos e fortemente acoplados mecanismos fundamentais é de especial importância, uma vez que este conhecimento permite projetar um controlador de forma adequada, tornando possível contornar os aparentes antagonismos do sistema. Pode-se com o uso do controle ativo, aumentar a liberação de calor no processo de combustão e simultaneamente diminuir as oscilações do campo acústico. Num controle passivo, o aumento da liberação de calor acarreta um aumento das oscilações de pressão, fazendo com que a configuração final represente um termo de compromisso entre as duas características.

O que acaba de ser exposto permite concluir que técnicas ativas de controle são a única alternativa quando múltiplos critérios de performance devem ser satisfeitos simultaneamente.

O sistema mostrado na Figura 1.1 assemelha-se ao utilizado para sistemas de anti-som no qual um som de mesma frequência e amplitude, porém defasado de π radianos com relação ao som que se deseja eliminar, é inserido no sistema de modo a promover uma interferência destrutiva. O técnica anti-som age somente no campo acústico, não alterando as características da fonte.

No caso do uso de atuadores acústicos para o controle ativo de instabilidade em combustão, o sistema atua não somente no campo acústico como também na fonte acústica, alterando seu comportamento. Este fato introduz uma característica que o diferencia da técnica anti-som no sentido de que a potência a ser utilizada pelo atuador é alta apenas nos instantes iniciais, quando o sistema é levado de uma condição de instabilidade (oscilação de ciclo-limite, devido às não-linearidades do sistema) para uma condição de equilíbrio (sem oscilações), passando então a consumir apenas uma pequena fração de energia. Na técnica anti-som, por outro lado, a potência fornecida aos atuadores acústicos é sempre a mesma.

2. MODELAGEM DO SISTEMA

O fenômeno de instabilidade termoacústica é devido ao acoplamento instável de dois mecanismos físicos diferentes: acústica e a liberação de calor devido à combustão. Num escoamento reativo, os fenômenos de origem acústica interferem (através dos campos de pressão e velocidade variáveis) no processo de combustão, ao passo que a energia liberada na combustão alimenta o campo acústico.

2.1. Modelagem do Sistema em Malha Aberta

2.1.1. Equações de Conservação

Para tornar a modelagem do sistema mais simples, é suposto que o sistema possua apenas uma dimensão e que todos os fenômenos dissipativos são desprezíveis e que as relações de gases perfeitos são válidas. As equações de conservação de massa, momento e energia são:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot u)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \cdot p \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = (\gamma - 1) \cdot q \quad (2.3)$$

onde ρ , u e p são a densidade, velocidade e pressão, respectivamente. A constante γ é a razão de calores específicos e q é a taxa de liberação de calor por unidade de volume.

Uma técnica usual de tratamento do sistema de equações acima é separar os componentes médios e perturbados das variáveis, como em $p(x,t) = \bar{p}(x) + p'(x,t)$. Assumindo-se que os componentes perturbados são pequenos quando comparados com os valores médios e que o número de Mach é pequeno, é possível deduzir as seguintes relações:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = (\gamma - 1) \cdot \frac{\partial q'}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma \cdot \bar{p} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} = (\gamma - 1) \cdot q' \quad (2.5)$$

sendo que a constante $\bar{c}$ é o valor médio da velocidade do som no meio e dada por:

$$\bar{c}^2 = \gamma \cdot \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \quad (2.6)$$

2.1.2. Determinação do Modelo de Dimensão Finita

Como é normalmente feito para a resolução de equações diferenciais parciais, separam-se as variações espaciais e temporais das variáveis na forma do produto de duas funções, uma dependente somente das coordenadas espaciais (no caso a única variável espacial é x) e a outra somente da variável temporal t . Com este fim, expressa-se o componente perturbado da pressão p' como:

$$p'(x, t) = \bar{p} \cdot \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \cdot \eta_i(t) \quad (2.7)$$

onde n é o número de modos dominantes do sistema e a função de modo tem a seguinte forma:

$$\psi_i(x) = \text{sen}(k_i \cdot x + \varphi_{i0}) \quad (2.8)$$

onde k_i e φ_i são determinados pelas condições de contorno e correspondem à forma do modo espacial, k_i são os números de onda.

Utilizando-se a técnica de Galerkin, é possível reduzir o sistema de equações diferenciais parciais (2.4) e (2.5) a um sistema finito de equações diferenciais ordinárias que aproximam o sistema contínuo, sendo que a aproximação se torna exata a medida que n aproxima-se do infinito.

A liberação de calor pela combustão ocorre ao longo de uma distância muito pequena de forma que, para fins de modelagem é conveniente assumir que a liberação de calor é concentrada na região plana de coordenada x_0 . Assim é possível escrever:

$$q'(x, t) = \delta(x - x_0) \cdot q'_0(t). \quad (2.9)$$

A substituição das equações (2.7) e (2.9) na equação (2.4) fornece:

$$\bar{p} \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \ddot{\eta}_i(t) - c^2 \bar{p} \sum_{i=1}^n \psi_i'(x) \eta_i(t) = (\gamma - 1) \delta(x - x_0) \dot{q}_0'(t) \quad (2.10)$$

multiplicando-se ambos os membros de (2.10) por $\psi_k(x)$ e integrando-se x de 0 a L tem-se

$$\bar{p} \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^L \psi_i \psi_k dx - c^2 \bar{p} \sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^L \psi_i' \psi_k dx = (\gamma - 1) \dot{q}_0' \int_0^L \delta(x - x_0) \psi_k dx \quad (2.11)$$

para $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Devido a escolha de funções base para a representação da estrutura modal de acordo com a equação (2.8) é válida a relação:

$$\psi_i'(x) = -k_i^2 \cdot \psi_i(x). \quad (2.12)$$

A aplicação da equação (2.12) na equação (2.11) fornece

$$\sum_{i=1}^n \left[\eta_i(t) + c^2 k_i^2 \eta_i(t) \right] \int_0^L \psi_i(x) \psi_k(x) dx = \frac{(\gamma - 1)}{\bar{p}} \dot{q}_0'(t) \psi_k(x_0) \quad (2.13)$$

para $k = 1, 2, 3, \dots, n$. A substituição das equações (2.7) e (2.9) na equação (2.5) fornece:

$$\bar{p} \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \ddot{\eta}_i(t) + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x}(x, t) = (\gamma - 1) \delta(x - x_0) \dot{q}_0'(t) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}(x, t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} \delta(x - x_0) \dot{q}_0'(t) - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \ddot{\eta}_i(t). \quad (2.15)$$

Integrando-se de 0 a x_0 obtém-se:

$$\int_0^{x_0} \frac{\partial u'}{\partial x}(x, t) dx = \frac{\gamma - 1}{\gamma \bar{p}} \dot{q}_0'(t) \int_0^{x_0} \delta(x - x_0) dx - \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \ddot{\eta}_i(t) \int_0^{x_0} \psi_i(x) dx. \quad (2.16)$$

A primeira integral do segundo membro fornece:

$$\int_0^{x_0} \delta(x - x_0) dx = \theta, \quad \theta \in [0, 1] \quad (2.17)$$

enquanto que a integral sob o sinal de somatória fornece:

$$\int_0^{x_0} \psi_i(x) dx = -\frac{1}{k_i^2} \frac{d\psi_i(x)}{dx} \Big|_0^{x_0} \quad (2.18)$$

devido às considerações já feitas. Substituindo-se (2.17) e (2.18) em (2.16) tem-se:

$$u'(x, t) \Big|_0^{x_0} = \theta \frac{\gamma - 1}{\gamma p} q'_0(t) + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i(t)}{k_i^2} \frac{d\psi_i}{dx}(x) \Big|_0^{x_0} \quad (2.19)$$

utilizando-se a condição de contorno acusticamente fechada em x_0 tem-se que $u'(0, t) = 0$ e $\psi'_i(0) = 0$, logo:

$$u'_0 \equiv u'(x_0, t) = \theta \frac{\gamma - 1}{\gamma p} q'_0(t) + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i(t)}{k_i^2} \frac{d\psi_i}{dx}(x_0) \quad (2.20)$$

Para permitir uma maior clareza é introduz-se neste ponto a notação matricial, partindo-se das definições a seguir:

$$\Psi(x) = [\psi_1(x) \ \dots \ \psi_n(x)]^T \quad (2.21)$$

$$\eta(x) = [\eta_1(x) \ \dots \ \eta_n(x)]^T \quad (2.22)$$

$$E = \int_0^L \Psi(x) \cdot \Psi^T(x) \cdot dx \quad (2.23)$$

$$K = \text{diag} [k_1 \ \dots \ k_n] \quad (2.24)$$

$$\Omega = \dot{c} \cdot K \quad (2.25)$$

Com o emprego destas definições as equações (2.13) e (2.20) tornam-se:

$$\eta(t) + \Omega^2 \cdot \eta(t) = \frac{\gamma - 1}{p} \cdot E^{-1} \cdot \Psi(x_0) \cdot q'_0(t) \quad (2.26)$$

$$u'_0(t) = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d\Psi^T}{dx}(x_0) \cdot K^{-2} \cdot \eta(t) + \theta \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma \cdot p} \cdot q'_0(t) \quad (2.27)$$

A equação (2.27) mostra como o calor liberado pela chama afeta o campo acústico. Uma análise da cinemática da chama permite que se obtenha a relação inversa que é o efeito do campo acústico sobre o processo de combustão, uma vez que a chama localiza-se sobre o campo acústico.

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} = S_u \cdot \frac{\partial \xi'}{\partial x} + u'_0(t) \quad (2.28)$$

$$Q'_0(t) = -\kappa \cdot \int_0^{r_d} r \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot dr \quad (2.29)$$

onde: $\kappa = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot S_u \cdot \Delta q_r$ e Δq_r é o calor de reação por unidade de massa da mistura (valor absoluto da entalpia de reação), S_u é a velocidade de queima com relação a mistura não queimada. As equações acima podem ser aproximadas por um atraso de primeira ordem, assumindo-se que $u'_0(t)$ varia lentamente:

$$\dot{Q}'_0 + \frac{2 \cdot S_u}{r_d} \cdot Q'_0 = 2 \cdot \kappa \cdot r_d \cdot u'_0 \quad (2.30)$$

É de uso comum o ancoramento da chama por uma placa perfurada. O ancoramento da chama ocorre porque a velocidade de queima dos gases possui uma velocidade característica para cada mistura ar-combustível (velocidade esta não superior a 0,47 m/s para o propano) e portanto se a velocidade do escoamento através da placa perfurada for maior que a velocidade de queima e a velocidade do escoamento após a placa for menor que a velocidade de queima, então há ancoragem da chama logo após a placa perfurada. Seja D o diâmetro de tal placa e n_f o número de furos, usando-se as seguintes definições obtém-se a relação entre o campo acústico, aqui representado pela variável u'_0 , e o calor liberado pela reação:

$$q'_0(t) = \frac{4 \cdot n_f}{\pi \cdot D^2} \cdot Q'_0(t) \quad (2.31)$$

$$k_1 = 2 \cdot \frac{S_u}{r_d} \quad (2.32)$$

$$b_2 = k_1 \cdot \left(\frac{d}{D} \right)^2 \cdot n_f \cdot \rho \cdot \Delta q_r \quad (2.33)$$

$$q'_0(t) + k_1 \cdot q'_0(t) = b_2 \cdot u'_0(t) \quad (2.34)$$

As equações (2.26), (2.27) e (2.34) definem o sistema de combustão completo e está em uma forma que permite a análise das características de estabilidade. A estrutura destas equações mostra a natureza das realimentações intrínsecas e interconecções entre o campo acústico e a dinâmica da chama.

A Figura 2.1 mostra um esquema que ajuda a interpretar as equações recém deduzidas:

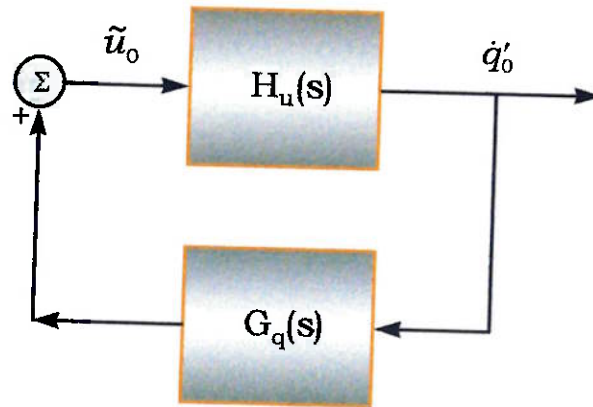


Figura 2.1 - Instabilidade termoacústica em um sistema de combustão.

Reunindo-se a relações (2.26), (2.27) e (2.34) tem-se uma representação do sistema completo. Uma mudança na notação torna a representação mais compacta:

$$\eta + \Omega^2 \cdot \eta = \mathbf{b} \cdot q'_0 \quad (2.35)$$

$$\dot{q}'_0 = -b_3 \cdot q'_0 + b_2 \cdot u'_0 \quad (2.36)$$

$$u'_0 = \mathbf{c}^T \cdot \eta \quad (2.37)$$

onde:

$$b_3 = b_1 - \theta \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma \cdot \bar{p}} \cdot b_2,$$

$$\mathbf{b} = \frac{\gamma - 1}{\bar{p}} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \Psi(x_0) \text{ e}$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\gamma} \cdot \mathbf{K}^{-2} \cdot \frac{d\Psi}{dx}(x_0).$$

Aplicando-se a transformada de Laplace ao sistema de equações acima obtém-se as seguintes funções de transferência:

$$u'_0 = G_q(s) \cdot \dot{q}'_0 \quad (2.38)$$

$$q'_0 = H_u(s) \cdot u'_0, \quad (2.39)$$

sendo que:

$$G_q(s) = \frac{\gamma - 1}{\gamma \cdot p} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \cdot \frac{s}{s^2 + \omega_i^2} \quad (2.40)$$

$$H_u(s) = \frac{b_2 \cdot s}{s + b_3} \quad (2.41)$$

$$\beta_i = \frac{\frac{d\psi_i}{dx}(x_0) \cdot \psi_i(x_0)}{k_i^2 \cdot \int_0^L \psi_i^2(\xi) \cdot d\xi} \quad (2.42)$$

A estabilidade do sistema é determinada pelo sinal dos coeficientes β_i . Se para qualquer i o valor de β_i for menor do que zero o sistema é estável, se algum β_i for maior do que zero então o sistema será instável.

2.2. Modelagem do Sistema em Malha Fechada

Com o intuito de estabilizar o sistema através de controle ativo é necessário modelar a resposta do sistema a sinais de atuação. Neste trabalho é feito o uso de um alto-falante como atuador. Cabe neste ponto esclarecer algumas hipóteses importantes no que tange a idealização deste dispositivo, bem como do sensor (microfone) de maneira a tornar sua modelagem mais simples.

2.2.1. Equações de Conservação

Em primeiro lugar considera-se que o atuador é pontual, ou seja, uma vez que o modelo matemático empregado é unidimensional, e que a dimensão característica do alto-falante com respeito ao escoamento é pequena em comparação com as dimensões da câmara de combustão; admite-se que o efeito do atuador esteja concentrado ao longo de uma região muito pequena do escoamento, de modo que pode-se atribuir um único valor para a posição do alto-falante em relação ao escoamento.

O atuador é modelado como uma fonte nas equações de conservação. As equações de onda e de conservação de energia tornam-se:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = (\gamma - 1) \cdot \frac{\partial q'}{\partial t} + \gamma \cdot A_r \cdot \dot{p} \cdot \frac{\partial v_c}{\partial t} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma \cdot p \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} = (\gamma - 1) \cdot q' + \gamma \cdot A_r \cdot p \cdot v_c. \quad (2.44)$$

A grandeza v_c corresponde é numericamente igual a velocidade do diafragma do alto-falante que é localizado pela coordenada x_a . Isto é traduzido por $v_c = v_{ca} \cdot \delta(x - x_a)$. A velocidade v_{ca} é controlada pela corrente fornecida ao alto-falante. Neste trabalho é admite-se que a seguinte equação seja válida:

$$v_{ca} = k_a \cdot i \quad (2.45)$$

O controle da corrente elétrica i fornecida ao alto-falante é proveniente de um controlador que recebe o sinal do microfone como sinal de erro.

2.2.2. Determinação do Modelo de Dimensão Finita

Procedendo-se de forma análoga a do início desta seção é obtido o seguinte modelo de dimensão finita:

$$\eta + \Omega^2 \cdot \eta = \mathbf{b} \cdot q'_0 + \mathbf{b}_c \cdot i \quad (2.46)$$

$$\dot{q}'_0 = -b_3 \cdot q'_0 + b_2 \cdot u'_0 \quad (2.47)$$

$$u'_0 = \mathbf{c}^T \cdot \eta + k_{ao} \cdot k_a \cdot A_r \cdot \int i \, d\tau \quad (2.48)$$

onde:

$$\mathbf{b}_c = \gamma \cdot k_a \cdot A_r \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \psi(x_a) \text{ e}$$

$$k_{ao} = \int_0^{x_0} \delta(x - x_a) \, dx.$$

O valor de k_{ao} deve ser não nulo para que a saída do alto-falante interfira no processo de combustão de forma mais direta. Para tanto a localização do alto-falante deve ser a montante do ponto de ancoragem da chama, como pode ser facilmente observado pela definição de k_{ao} dada anteriormente.

O sistema de equações pode ser colocado na forma de equações de estado eliminando-se a variável u'_0 e convertendo-se as equações diferenciais de segunda ordem no dobro de equações diferenciais de primeira ordem.

Para a obtenção da representação do sistema na forma de estado substitui-se (2.48) em (2.47) obtendo-se:

$$\dot{q}'_0 = -b_3 q'_0 + b_2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \dot{i}'_k + k_{ao} k_a A_r b_2 \int i d\tau \quad (2.49)$$

O uso de (2.49) em (2.46) fornece:

$$\ddot{i}' = -b_3 b_i q'_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{ik}^2 \eta_k + b_2 b_i \sum_{k=1}^{\infty} c_k \dot{i}'_k + k_{ao} k_a A_r b_2 b_i \int i d\tau + b_{c,i} i. \quad (2.50)$$

Como o sistema dinâmico possui apenas uma entrada (a saber i) e nas equações diferenciais acima, $\ddot{i}'_k$ depende explicitamente tanto de i quanto de sua integral ao longo do tempo, não é possível escolher as grandezas q'_0 , η_k e $\dot{i}'_k$ como variáveis de estado, pois i e sua integral ao longo do tempo (carga elétrica) são dependentes uma da outra, não sendo portanto sinais distintos.

Conforme pode ser visto em [14], para um sistema regido pela equação diferencial ordinária linear não-homogênea com uma única entrada:

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \dots + a_{n-1} \dot{i}' + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \dots + b_{n-1} \dot{i}' + b_n u \quad (2.51)$$

pode-se definir como variáveis de estado as grandezas seguintes:¹

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 u \\ x_2 &= \dot{i}' - \beta_0 \dot{i}' - \beta_1 u = \dot{i}'_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{i}' - \beta_0 \ddot{i}' - \beta_1 \dot{i}' - \beta_2 u = \ddot{i}'_2 - \beta_2 u \\ &\vdots \\ x_n &= \overset{(n-1)}{y} - \beta_0 \overset{(n-1)}{u} - \beta_1 \overset{(n-2)}{u} - \dots - \beta_{n-2} \dot{i}' - \beta_{n-1} u = \dot{i}'_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{aligned} \quad (2.52)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \\ &\vdots \\ \beta_n &= b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Define-se portanto o vetor de estados da seguinte forma:

¹ Não há relação entre as grandezas representadas pelo mesmo símbolo β nesta e na seção anterior.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Para o sistema de combustão em estudo o sinal de entrada é:

$$u = \int i d\tau \tag{2.55}$$

de forma que a comparação entre (2.49) e (2.51) permite concluir que um dos estados é:

$$x_0 = q'_0. \tag{2.56}$$

Comparando-se (2.50) com (2.51) permite definir os estados:

$$\begin{aligned}
x_i &= \eta_i - \beta_{0,i} \int i d\tau \\
x_{n+i} &= \dot{\eta}_i - \beta_{0,i} \dot{i} - \beta_{1,i} \int i d\tau = \dot{x}_i - \beta_{0,i} \dot{i} - \beta_{1,i} \int i d\tau \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.57}$$

sendo que para este sistema:

$$\begin{aligned}
\beta_{0,i} &= 0 \\
\beta_{1,i} &= b_{c,i}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Finalmente define-se o vetor de estado do sistema como:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q'_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \\ \dot{\eta}_1 - b_{c,1} \int i d\tau \\ \vdots \\ \dot{\eta}_n - b_{c,n} \int i d\tau \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

O sistema dinâmico definido pelas equações (2.46)-(2.48) pode finalmente ser colocado na forma de estado com base na definição (2.59) obtendo-se:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_0 &= -b_3 x_0 + b_2 \sum_{k=1}^n c_k x_{n+k} + b_2 \left(k_{ao} k_a A_r + \sum_{k=1}^n c_k b_{c,k} \right) \int id\tau \\
\dot{x}_i &= x_{n+i} + b_{c,i} \int id\tau \\
\dot{x}_{n+i} &= -b_3 b_i x_0 - \sum_{k=1}^n \omega_{i,k}^2 x_k + b_2 b_i \sum_{k=1}^n c_k x_{n+k} + b_2 b_i \left(k_{ao} k_a A_r + \sum_{k=1}^n c_k b_{c,k} \right) \int id\tau
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Reescrevendo (2.60) na forma matricial tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \int id\tau \tag{2.61}$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -b_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_2 c_1 & b_2 c_2 & \cdots & b_2 c_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_3 b_1 & -\omega_{11}^2 & -\omega_{12}^2 & \cdots & -\omega_{1n}^2 & b_2 b_1 c_1 & b_2 b_1 c_2 & \cdots & b_2 b_1 c_n \\ -b_3 b_2 & -\omega_{21}^2 & -\omega_{22}^2 & \cdots & -\omega_{2n}^2 & b_2 b_2 c_1 & b_2 b_2 c_2 & \cdots & b_2 b_2 c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_3 b_n & -\omega_{n1}^2 & -\omega_{n2}^2 & \cdots & -\omega_{nn}^2 & b_2 b_n c_1 & b_2 b_n c_2 & \cdots & b_2 b_n c_n \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

e:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_2 \left(k_{ao} k_a A_r + \sum_{k=1}^n c_k b_{c,k} \right) \\ b_{c,1} \\ b_{c,2} \\ \vdots \\ b_{c,n} \\ b_2 b_1 \left(k_{ao} k_a A_r + \sum_{k=1}^n c_k b_{c,k} \right) \\ b_2 b_2 \left(k_{ao} k_a A_r + \sum_{k=1}^n c_k b_{c,k} \right) \\ \vdots \\ b_2 b_n \left(k_{ao} k_a A_r + \sum_{k=1}^n c_k b_{c,k} \right) \end{pmatrix}. \tag{2.63}$$

A saída do sistema y é lida através de um microfone localizado na posição x_s . Nesta posição a amplitude dos vários modos é dada pelo vetor $\psi(x_s)$ e o sinal de pressão lido pelo microfone é resultado da sobreposição de cada um dos modos através da seguinte equação:

$$y = \psi(x_s)^T \cdot \eta(t) \quad (2.64)$$

Segue a obtenção da função de transferência entre a leitura do microfone e a corrente direcionada para o alto-falante. Para a dedução da função de transferência utilizou-se o método da transformada de Laplace².

Partindo da equação (2.46) tem-se:

$$(s^2 \cdot I + \Omega^2) \cdot \eta = \mathbf{b} \cdot q'_0 + \mathbf{b}_c \cdot i. \quad (2.65)$$

Uma vez que:

$$q'_0(s) = s \cdot q'_0(s), \quad (2.66)$$

a equação (2.48) fornece:

$$q'_0(s) = \frac{b_2 \cdot s}{s + b_3} \cdot \mathbf{c}^T \cdot \eta(s) + \frac{b_2 \cdot k_{ao} \cdot k_a \cdot A_r \cdot i}{s \cdot (s + b_3)}. \quad (2.67)$$

Substituindo-se a equação (2.67) na equação (2.65), considerando (2.66) obtém-se:

$$(s^2 \cdot I + \Omega^2) \cdot \eta = \mathbf{b} \cdot s \cdot \left[\frac{b_2 \cdot s}{s + b_3} \cdot \mathbf{c}^T \cdot \eta + \frac{b_2 \cdot k_{ao} \cdot k_a \cdot A_r \cdot i}{s \cdot (s + b_3)} \right] + \mathbf{b}_c \cdot i \quad (2.68)$$

$$(s^2 \cdot I + \Omega^2) \cdot \eta - \frac{b_2 \cdot s^2}{s + b_3} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}^T) \cdot \eta = \mathbf{b} \cdot \frac{b_2 \cdot k_{ao} \cdot k_a \cdot A_r}{s + b_3} \cdot i + \mathbf{b}_c \cdot i \quad (2.69)$$

$$\frac{(s^2 \cdot I + \Omega^2) \cdot (s + b_3) - b_2 \cdot s^2 \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}^T}{s + b_3} \cdot \eta = \frac{\mathbf{b} \cdot b_2 \cdot k_{ao} \cdot k_a \cdot A_r + \mathbf{b}_c \cdot (s + b_3)}{s + b_3} \cdot i \quad (2.70)$$

$$\eta = \left[(s^2 I + \Omega^2)(s + b_3) - b_2 s^2 \mathbf{b} \mathbf{c}^T \right]^{-1} \cdot [\mathbf{b} b_2 k_{ao} k_a A_r + \mathbf{b}_c (s + b_3)] \cdot i. \quad (2.71)$$

Lembrando da relação (2.64) a função de transferência entre a pressão na posição do microfone e a corrente elétrica de acionamento do alto-falante é:

² A rigor, a transformada de Laplace de uma função $f(t)$ deve ser representada por uma outra notação $F(s)$ por exemplo, pois tratam-se de funções diferentes. Entretanto, para simplificar utiliza-se a mesma notação com exceção do argumento que, quando explícito nas equações, corresponderá à variável correta (t ou s).

$$G(s) = \frac{y(s)}{i(s)} = \Psi^T \left[(s^2 I + \Omega^2)(s + b_3) - b_2 s^2 \mathbf{b} \mathbf{c}^T \right]^{-1} \cdot [\mathbf{b} b_2 k_{ao} k_a A_r + \mathbf{b} c (s + b_3)] \quad (2.72)$$

Para o ca.so em que $n = 1$ a função de transferência torna-se:

$$G(s) = \frac{(s + b_3) \cdot b_c \cdot c_c + k_{ao} \cdot l_1 \cdot b_2 \cdot A_r \cdot c_c}{(s^2 + \omega^2) \cdot (s + b_3) - b \cdot c \cdot b_2 \cdot s^2} \quad (2.73)$$

2.2.3. Analogia com Estruturas Flexíveis

Conforme descrito em [1] pode ser feita uma comparação entre a estrutura do modelo para uma estrutura flexível e um sistema de combustão. Para se efetuar uma análise deste tipo deve-se reescrever as funções de transferência em uma forma não mínima, ou seja, com um número de variáveis maior que o de variáveis de estado, de modo a clarificar a influência de cada fenômeno envolvido no processo:

$$y = G_{yi}(s) \cdot i + G_{yq}(s) \cdot \dot{q}'_0 \quad (2.74)$$

$$u'_0 = G_{ui}(s) \cdot i + G_{ui}(s) \cdot \dot{q}'_0 \quad (2.75)$$

$$q'_0 = H_u(s) \cdot u'_0 \quad (2.76)$$

sendo que:

$$G_{yi} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x_s) \cdot b_{c,i}}{s^2 + \omega_i^2},$$

$$G_{yi} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(x_s) \cdot b_i}{s^2 + \omega_i^2} e$$

$$G_{ui} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i \cdot b_{c,i} \cdot s}{s^2 + \omega_i^2} + k_a \cdot k_{ao} \cdot \frac{A_r}{s}.$$

Com esta representação uma estrutura flexível constitui-se apenas na função de transferência $G_i(s)$ cujos pólos correspondem às frequências naturais e os zeros às localizações dos sensores e do atuadores. Num sistema de combustão por outro lado os pólos da função de transferência depende não apenas das frequências naturais como também da localização da chama. Os zeros da função de transferência dependem não somente dos valores da função de modo espacial nas coordenadas dos sensores e atuadores $\psi(x_s)$ e

$\psi(x_a)$ mas também dos valores desta função bem como de sua derivada avaliada na localização da chama: $\psi(x_0)$ e $\psi'(x_0)$.

Como se pode notar o modelo apresentado é significativamente mais complexo do que o de uma estrutura flexível, acrescente-se a isto o fato de em geral o número de modos necessários para uma representação adequada do sistema ser usualmente maior que o necessário para a análise de uma estrutura flexível.

2.2.4. Análise de Observabilidade e Controlabilidade

Um conceito de extrema importância que deve ser analisado é a observabilidade e controlabilidade do sistema. Um sistema dinâmico é dito observável se é possível reconstruir o seu estado com base na medição de sua saída e é controlável se é possível fazer com que o sistema atinja qualquer estado desejado³ excitando-o a partir de suas entradas.

Seja um sistema dinâmico linear e invariante no tempo, da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{2.77}$$

A condição necessária e suficiente para garantir que um sistema dinâmico linear seja observável é que o posto da matriz:

$$\begin{pmatrix} C^* & A^*C^* & \dots & (A^*)^{n-1}C^* \end{pmatrix}\tag{2.78}$$

seja igual a n .

A condição necessária e suficiente para garantir que um sistema dinâmico linear seja controlável é que o posto da matriz:

$$\begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}\tag{2.79}$$

seja igual a n .

Comparando o sistema (2.77) com as equações (2.62), (2.63) e (2.64) verifica-se que a matriz D é nula e que, para o sistema sob consideração, as

³ Neste caso trata-se de controlabilidade de estado. Existe também o conceito de controlabilidade de saída.

matrizes de observabilidade e controlabilidade são quadradas de forma que para verificar se o posto é igual a sua dimensão basta verificar o valor do determinante destas matrizes. Para a matriz de observabilidade este determinante é função, entre outras coisas, da posição do sensor e independe da posição do atuador. Analogamente, o determinante da matriz de controlabilidade depende da posição do atuador e independe da posição do sensor.

Os gráficos a seguir mostram o valor do determinante das matrizes de observabilidade e controlabilidade (levando-se em consideração somente os dois primeiros modos) em função da posição do sensor e atuador, respectivamente.

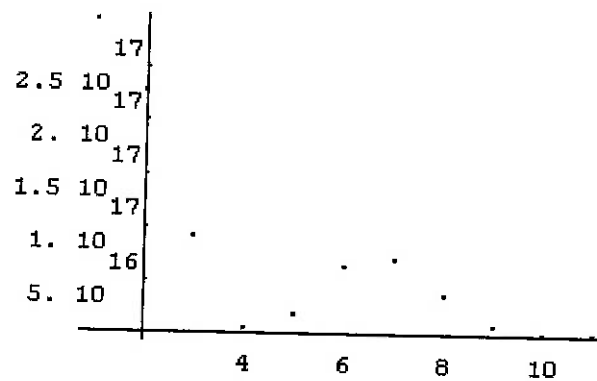


Figura 2.2 - Gráfico do determinante da matriz de observabilidade em função da posição do sensor. Valores não nulos indicam que o sistema é observável e valores nulos indicam que o sistema não é observável. Valor da abscissa é $10x_s/L$, onde L é o comprimento da câmara.

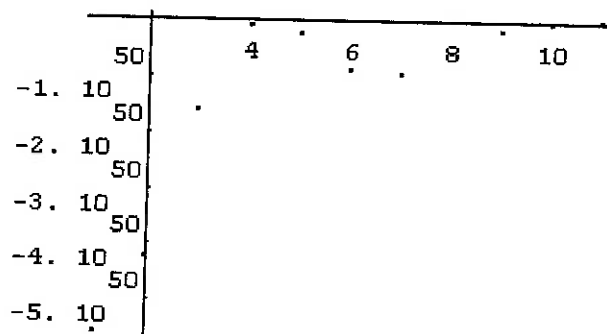


Figura 2.3 - Gráfico do determinante da matriz de controlabilidade em função da posição do sensor. Valores não nulos indicam que o sistema é controlável e valores nulos indicam que o sistema não é controlável. Valor da abscissa é $10x_a/L$, onde L é o comprimento da câmara.

Observa-se que o sistema é observável e controlável para qualquer posição de sensor e atuador, exceto na extremidade aberta e a um quarto do valor total do comprimento da câmara com relação a extremidade fechada, que corresponde a um nó do segundo modo.

2.2.5. Projeto do Controlador

Como descrito anteriormente, o controle do processo de combustão se dá através da atuação de um alto-falante que é comandado por uma corrente i gerenciada por um controlador, cuja entrada é a saída do microfone y . Deste modo tem-se:

$$i = G_c(s) \cdot y. \quad (2.80)$$

O problema do controle é portanto determinar a função de transferência $G_c(s)$ tal que o sistema torne-se estável. Para o caso de consideração de um único modo, para a condição de contorno acusticamente fechada à montante e acusticamente aberta a jusante. Considerando que o comprimento da câmara de combustão seja de 0,5 m, que o alto-falante e o microfone estão localizados a 0,1 m a jusante da entrada, que o poder calorífico do combustível seja de aproximadamente $2,2 \times 10^6$ kJ/kg, que a razão de área entre a câmara de combustão e o alto-falante é 0,1, que a câmara de combustão possua 0,1 m de diâmetro e que a consideração de apenas um modo de vibração é suficiente tem-se a seguinte função de transferência do sistema em malha aberta:

$$G(s) = \frac{28371 \cdot s + 3 \cdot 10^6}{s^3 - 225,76 \cdot s^2 + 1,21 \cdot 10^6 \cdot s - 2,712 \cdot 10^8} \quad (2.81)$$

O lugar das raízes correspondente a esta função de transferência está na Figura 2.4 a seguir:

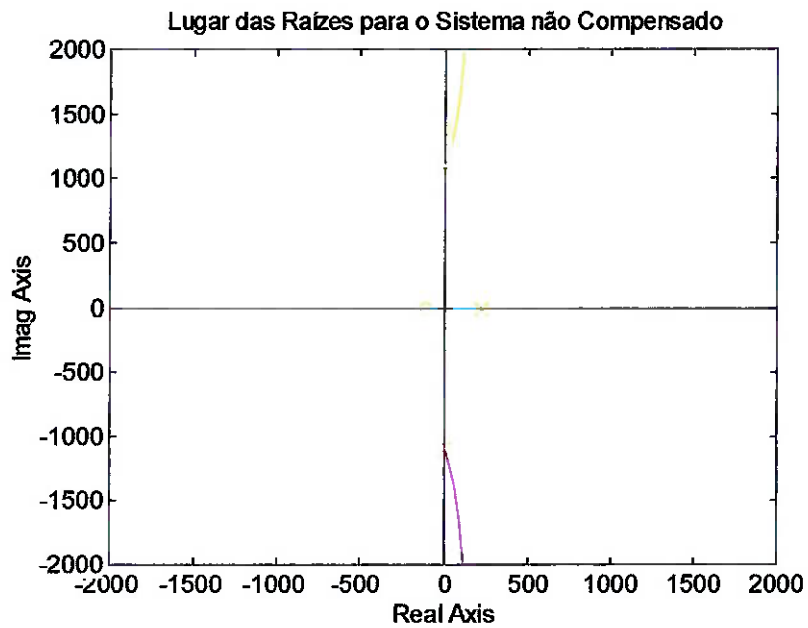


Figura 2.4 - Gráfico do lugar das raízes para o sistema de combustão não controlado.

Como é possível observar o sistema é instável tanto em malha aberta quanto para qualquer ganho em malha fechada. A resposta para o sistema em malha aberta a uma entrada degrau é dada na Figura 2.5.

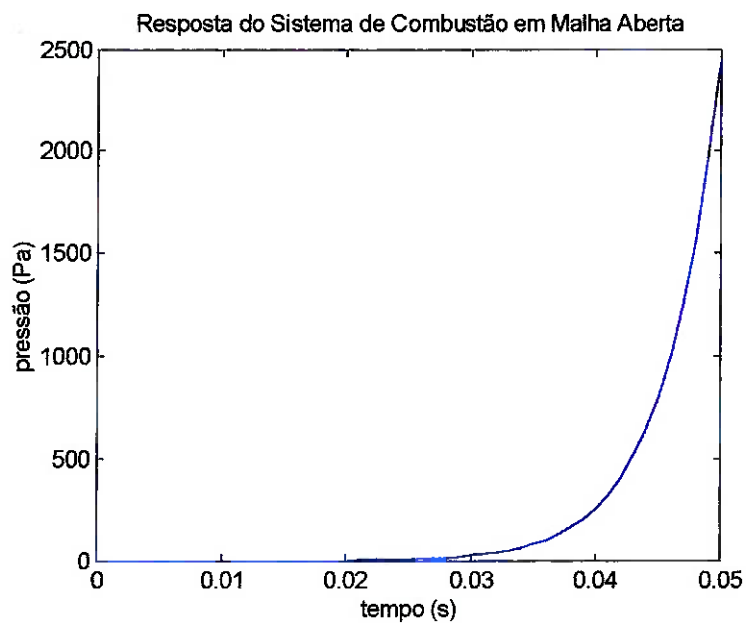


Figura 2.5 - Resposta do sistema em malha aberta a um degrau na entrada.

A resposta do sistema foi obtida com o seguinte diagrama de blocos implementado no MatLab-Simulink:

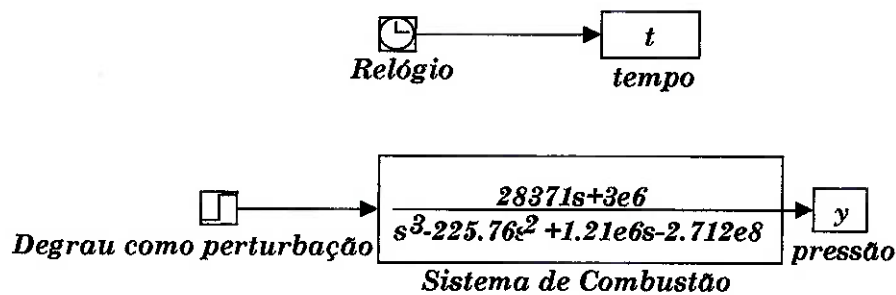


Figura 2.6 - Diagrama de blocos do sistema em malha aberta.

Uma vez que o sistema é instável para qualquer controlador proporcional, é necessário o projeto de um compensador com base nas posições dos pólos e zeros do sistema em malha aberta. Fatorando-se o denominador e o numerador da função de transferência (2.81) tem-se:

$$G(s) = \frac{28371 \cdot (s + 105,74)}{(s - 224,76) \cdot (s^2 - 1,5688 \cdot s + 1,21 \cdot 10^6)} \quad (2.82)$$

Esta função de transferência possui um zero em $-105,74$, um pólo real instável em $224,74$ e dois pólos complexos também instáveis em $s = 0,7844 \pm 1100 \cdot i$.

Para alterar-se o lugar das raízes de forma que exista um ganho para o qual o sistema se estabilize é preciso inserir zeros nas proximidades dos pólos complexos instáveis que atraiam o lugar das raízes para a região estável (semi-plano esquerdo). A posição escolhida para estes zeros foi em $s = 100 \pm 1100 \cdot i$. Para que o compensador fosse fisicamente realizável posicionou-se um dipólo em $s = -300$. O ganho foi ajustado por tentativa e erro e definiu-se seu valor em 200. A função de transferência do controlador é portanto:

$$G_c(s) = 200 \frac{s^2 + 200 \cdot s + 1,22 \cdot 10^6}{(s + 300)^2} \quad (2.83)$$

Introduzindo o compensador no diagrama de blocos do MatLab-Simulink de forma a atuar como um regulador (referência nula) e introduzindo um degrau unitário como perturbação externa:

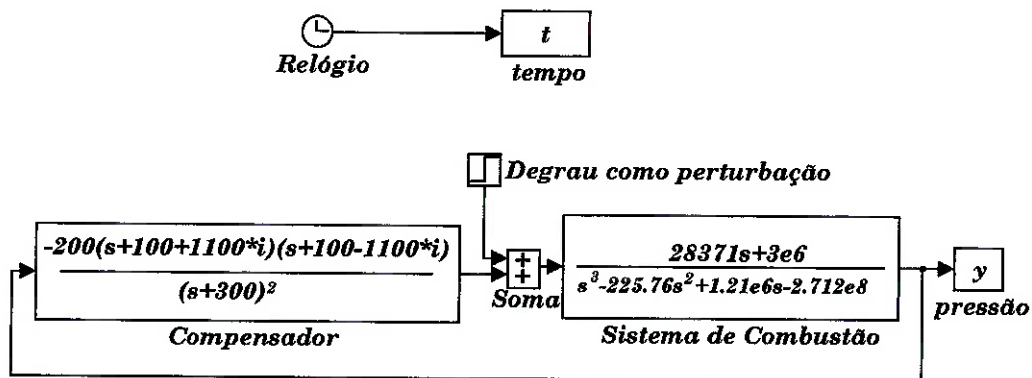
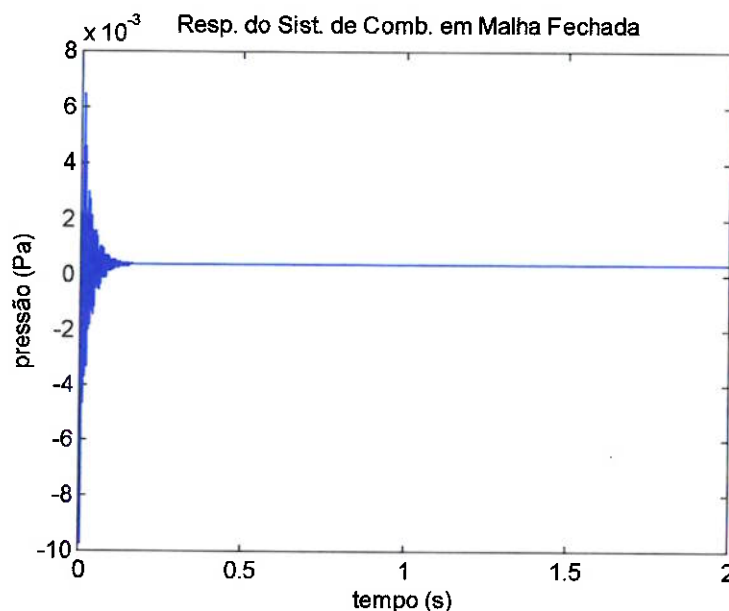


Figura 2.7 - Diagrama de blocos do sistema controlado com degrau unitário como perturbação.

A resposta do sistema foi obtida como sendo:



Como pode ser observado o sistema se estabiliza em cerca de 0,2 s. É possível melhorar o compensador de modo a diminuir o ganho necessário para estabilização através de uma escolha mais cuidadosa das posições dos pólos e zeros.

Uma estratégia de controle que pode ser utilizada no projeto é o controle adaptativo. Uma das vertentes populares deste tipo de controle é o controle adaptativo com modelo de referência.

A idéia central de um sistema de controle adaptativo com modelo de referência é de fazer com que o comportamento da planta controlada seja tão

próximo quanto possível de um comportamento ideal. Este comportamento ideal é especificado através do chamado modelo de referência. Para atingir este objetivo o esquema usualmente proposto é o da figura a seguir:

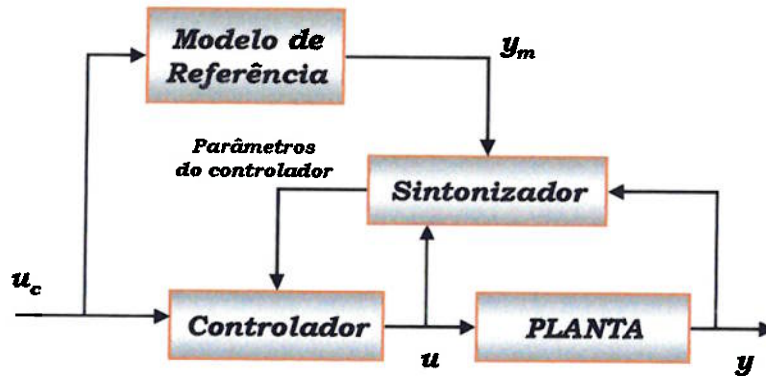


Figura 2.9 - Diagrama de Blocos de um Sistema de Controle Adaptativo com Modelo de Referência.

Neste esquema distinguem-se dois laços. Um é o laço usual de realimentação de saída (representado na parte inferior da figura); o outro laço corresponde à parte do controlador adaptativo com modelo de referência (representado na parte superior da figura).

O modelo de referência fornece a saída ideal do sistema controlado (malha fechada) y_m em função do sinal de referência u_c . Sendo que a relação entre entrada u_c e saída y_m pode ser tanto linear quanto não-linear.

O mecanismo de ajuste calcula com base nas saídas real e ideal e do sinal de comando o valor ajustado para os ganhos do controlador.

O controle adaptativo com modelo de referência é intimamente relacionado com o problema de alocação de pólos, pois especificar o modelo de referência consiste basicamente em se especificar os pólos do sistema em malha fechada. O controle adaptativo com modelo de referência se encarrega de fazer com que o controlador seja tal que os pólos do sistema em malha fechada sejam levados para as posições especificadas.

Nem sempre é possível fazer com que o sistema responda de acordo com o modelo de referência para todas os sinais de comando possíveis, muitas vezes o sistema adaptativo será eficaz apenas para uma certa classe de sinais de entrada.

Será analisado o caso em que tanto a planta a ser controlada quanto o modelo de referência são lineares, pois este consiste no caso mais simples, ideal para um primeiro contato.

Seja, portanto, a função de transferência da planta (contínua) entre o sinal de atuação u e o sinal de saída y dada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \quad (2.84)$$

sendo que o grau do denominador (o qual é considerado mônico⁴ para garantir unicidade de representação) deve ser maior ou igual ao grau do numerador. Os coeficientes dos polinômios em (2.84) não são conhecidos.

O modelo de referência é especificado por:

$$\frac{Y_m(s)}{U_c(s)} = G_m(s) = \frac{N_m(s)}{D_m(s)}. \quad (2.85)$$

A forma mais geral do controlador é dada por:

$$U(s) = G_{uc}(s)U_c(s) - G_{yc}(s)Y(s) = \frac{N_{uc}(s)}{D_c(s)}U_c(s) - \frac{N_{yc}(s)}{D_c(s)}Y(s). \quad (2.86)$$

Na equação acima $G_{uc}(s)$ corresponde a uma lei de controle do tipo *feedforward* (caso em que $G_{yc}(s) \equiv 0$) e $G_{yc}(s)$ está relacionada a lei de controle do tipo *feedback* (caso em que $U_c(s) \equiv 0$).

Uma vez tendo sido fornecida a forma da função de transferência do controlador, obtém-se a função de transferência do sistema em malha fechada eliminando-se a variável $U(s)$ através da substituição de (2.86) em (2.84) obtendo-se:

$$\frac{Y(s)}{U_c(s)} = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_p(s)N_{uc}(s)}{D_p(s)D_c(s) + N_p(s)N_{yc}(s)} \quad (2.87)$$

Como o objetivo é fazer com que o sistema controlado forneça a mesma resposta que o modelo de referência então deve-se igualar (2.87) com (2.85):

⁴ Um polinômio mônico é um em que o coeficiente de potência mais elevada do argumento é igual a 1.

$$G(s) = G_m(s) \Leftrightarrow \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_p(s)N_{uc}(s)}{D_p(s)D_c(s) + N_p(s)N_{yc}(s)} = \frac{N_m(s)}{D_m(s)} \quad (2.88)$$

A equação anterior pode ser escrita como:

$$D(s) = \frac{N(s)}{N_m(s)} D_m(s) \Leftrightarrow D_p(s)D_c(s) + N_p(s)N_{yc}(s) = \frac{N_p(s)N_{uc}(s)D_m(s)}{N_m(s)} \quad (2.89)$$

Como em princípio o grau de $D(s)$ é maior ou igual ao grau de $D_m(s)$, pois o primeiro deve conter, além dos pólos do modelo de referência ($D_m(s) = 0$), os zeros da planta ($N_p(s) = 0$) caso o sistema seja de fase mínima.

Esta é a famosa equação de Diophantine. A resolução desta equação fornece $D_c(s)$ e $N_{yc}(s)$. O polinômio $N_{uc}(s)$ (que como já foi mencionado está relacionado à lei de controle do tipo *feedforward*) possui uma maior liberdade de escolha desde que o segundo membro desde que o segundo membro de (2.89) seja um polinômio. Existem outras condições adicionais sobre a escolha do modelo de referência e sobre $N_{uc}(s)$ para que o controlador seja fisicamente realizável. Mais detalhes podem ser vistos em [2].

A resolução da equação (2.89) seria possível se $G_p(s)$ fosse conhecida onde teríamos o problema clássico de alocação de pólos. Como isto não ocorre, uma solução seria utilizar uma identificação dos parâmetros da planta e resolver a equação de Diophantine utilizando os valores estimados dos parâmetros da planta como se fossem iguais aos parâmetros reais (*Princípio da Equivalência à Certeza*). Ter-se-ia neste caso um controlador adaptativo indireto.

Conforme visto na seção anterior não é possível usar a equação de Diophantine para o problema de alocação de pólos.

O sintonizador é a parte do sistema que se encarrega de levar os parâmetros do controlador a partir de uma dada estimativa (baseada em um experimento ou num modelo da planta ou numa estimativa mais arbitrária) para os valores corretos (que fazem com que a planta se comporte como o modelo de referência).

Existem várias formas de se fazer o ajuste dos ganhos do controlador. As mais comuns são:

- método de gradiente;

- método baseados no segundo método de Lyapunov; e
- método de passividade.

Neste trabalho será considerado apenas o método de gradiente, por ser intuitivo, favorecendo a compreensão das idéias subjacentes.

Seja θ os parâmetros da planta e e o erro entre a saída real e a saída desejada para um dado sinal de comando.

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (2.90)$$

Define-se a função:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2. \quad (2.91)$$

O método do gradiente usa o gradiente de J no espaço dos parâmetros para alterar os parâmetros. Este método é de natureza heurística, sendo difícil assegurar que o método converge.

Para o ajuste usa-se então a lei:

$$\dot{\theta}_i = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta_i} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta_i}. \quad (2.92)$$

Para um sistema linear dado por (2.84), modelo de referência linear dado por (2.85) e controlador da forma (2.86) a lei de ajuste (2.92) é escrita como:

$$D_{c,i}(s) = \gamma e \frac{s^{k-i-1} U(s)}{D_m(s) D_0(s)} \quad (2.93)$$

$$N_{yc,i}(s) = \gamma e \frac{s^{l-i-1} Y(s)}{D_m(s) D_0(s)} \quad (2.94)$$

$$N_{uc,i}(s) = -\gamma e \frac{s^{m-i-1} U_c(s)}{D_m(s) D_0(s)} \quad (2.95)$$

onde k , l e m são os graus de $D_c(s)$, $N_{yc}(s)$ e $N_{uc}(s)$ respectivamente. O índice i indica cada um dos coeficientes do polinômio, sendo que $i = 0$ corresponde ao termo de maior potência.

Como exemplo para demonstrar o uso de um sistema de controle adaptativo direto com modelo de referência é considerado um caso em que se deseja obter o controle de uma planta de primeira ordem da forma:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_p(s) = \frac{n_p}{s + d_p} = \frac{0.5}{s + 1} \quad (2.96)$$

com modelo de referência também de primeira ordem:

$$\frac{Y_m(s)}{U_c(s)} = G_m(s) = \frac{n_m}{s + d_m} = \frac{2}{s + 2}. \quad (2.97)$$

Para um controlador da forma:

$$U(s) = n_{uc}U_c(s) - n_{yc}Y(s) \quad (2.98)$$

onde se fez $d_c = 1$. Substituindo (2.98) em (2.96) obtém-se:

$$\frac{Y(s)}{U_c(s)} = \frac{n_p n_{uc}}{s + d_p + n_p n_{yc}} = \frac{0.5 n_{uc}}{s + 1 + 0.5 n_{yc}}. \quad (2.99)$$

Igualando (2.97) e (2.99) conclui-se que:

$$n_{uc} = \frac{n_m}{n_p} = 4 \quad (2.100)$$

$$n_{yc} = \frac{d_m - d_p}{n_p} = 2 \quad (2.101)$$

Evidentemente se os parâmetros da planta fossem fixos e conhecidos não seria necessário o uso do controle adaptativo. Os valores obtidos em (2.100) e (2.101) devem ser os valores para os quais convergem os ganhos do controlador conforme o processo de adaptação evolui.

Uma vez que os parâmetros da planta são desconhecidos utiliza-se o método de gradiente para sintonizar os ganhos do controlador. Para fazer isto é calculada as derivadas parciais do erro em relação aos parâmetros do controlador:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(s)}{\partial n_{uc}} &= \frac{n_p}{s + d_p + n_p n_{yc}} U_c(s) \approx \frac{n_p}{s + d_m} U_c(s) = \frac{n_p}{n_m} Y_m(s) \\ \frac{\partial E(s)}{\partial n_{yc}} &= -\frac{n_p^2 n_{uc}}{(s + d_p + n_p n_{yc})^2} U_c(s) = -\frac{n_p}{s + d_p + n_p n_{yc}} Y(s) \approx -\frac{n_p}{s + d_m} Y(s) \end{aligned} \quad (2.102)$$

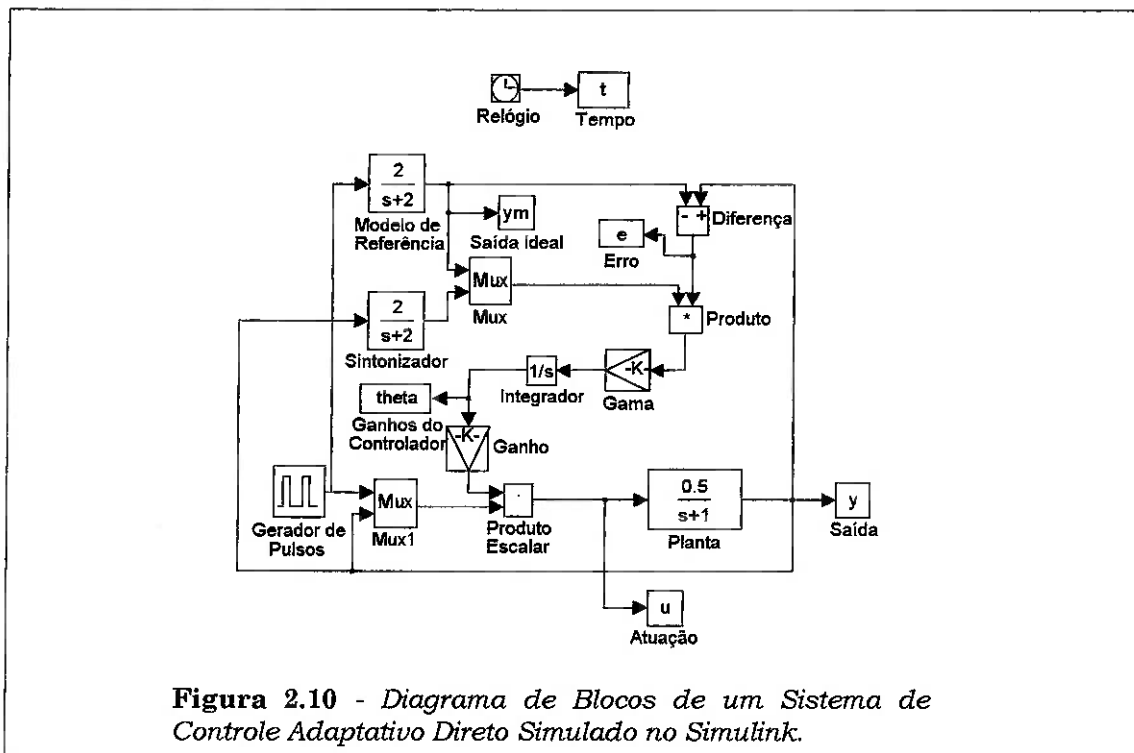
Usando o método do gradiente tem-se finalmente:

$$n_{uc}(t) = n_{uc}(0) - \frac{\gamma}{n_m} \int_0^t y_m(\tau) e(\tau) d\tau$$

$$n_{yc}(t) = n_{yc}(0) + \gamma \int_0^t L^{-1} \left[\frac{Y(s)}{s + d_m} \right] e(\tau) d\tau \quad (2.103)$$

sendo que o termo n_p foi “absorvido” por γ , para que o sistema seja realizável uma vez que n_p é desconhecido. Porém, para que isto seja válido, é necessário que se conheça o sinal de n_p . (hipótese clássica de controle adaptativo).

Este exemplo foi simulado em simulink. O diagrama de blocos correspondente pode ser visto na Figura 2.10 a seguir:



Para este sistema de controle plotou-se a saída y e a saída do modelo ideal y_m .

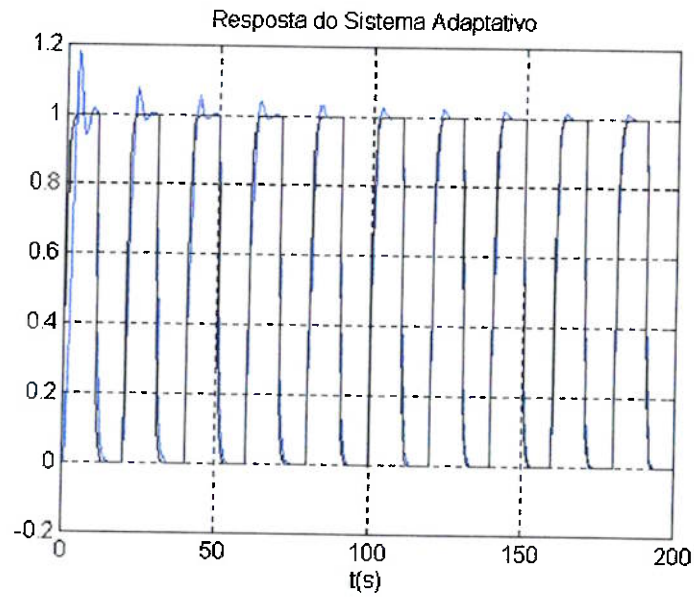


Figura 2.11 - Gráfico da resposta do sistema de controle adaptativo direto com modelo de referência com sinal de entrada igual a um trem de pulsos.

Os gráficos do sinal de atuação e do erro são mostrados nas figuras a seguir:

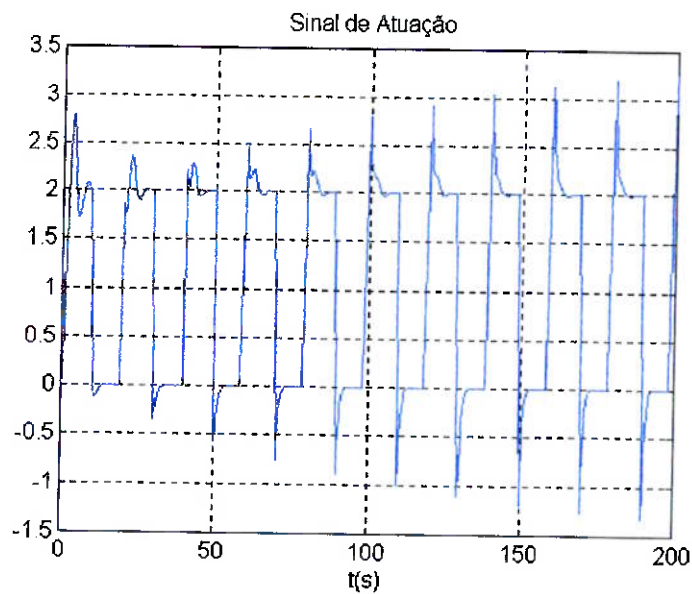


Figura 2.12 - Gráfico do sinal de atuação $u(t)$.

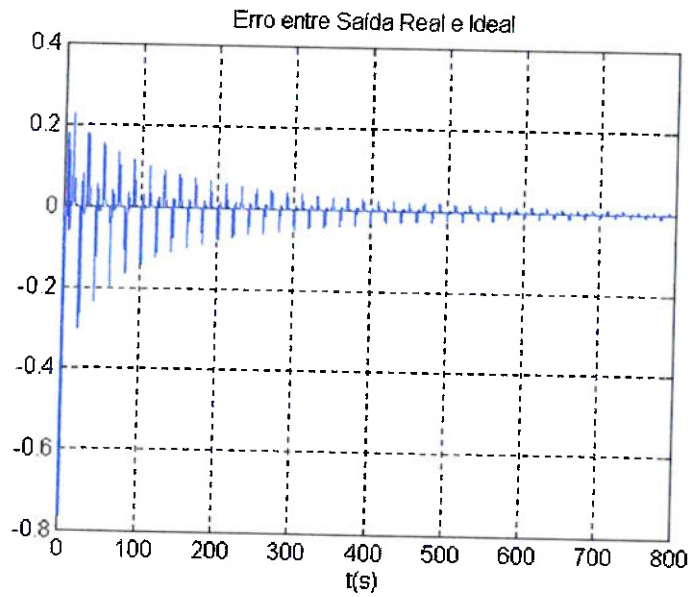


Figura 2.13 - Gráfico do sinal de erro entre as saídas ideal e real.

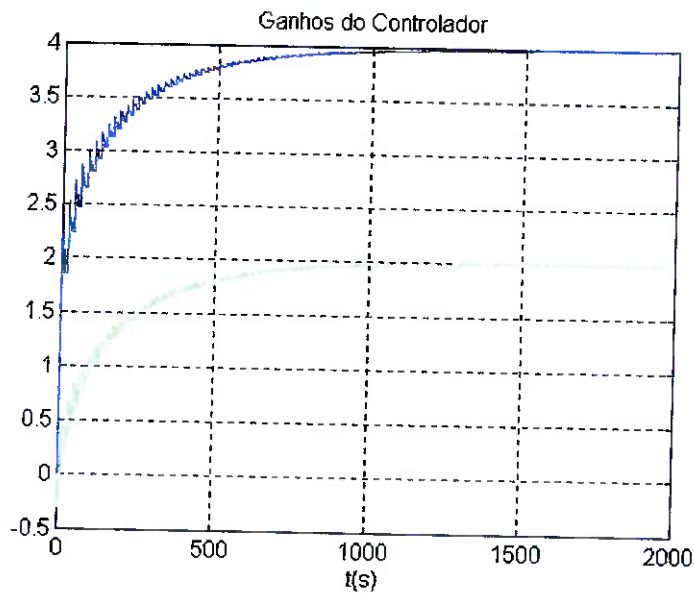


Figura 2.14 - Parâmetros do controlador. Notar que os ganhos do controlador convergem para os ganhos corretos partindo de valores nulos.

Para implementação de um controlador adaptativo com modelo de referência pode-se reescrever as equações (2.103) no domínio discreto ou partir-se de um modelo discreto desde o início.

3. APARATO DE TESTES

3.1. Parte Estrutural

O sistema de combustão que será objeto de teste para validação do modelo de controle é apresentado nesta seção. A câmara de combustão será construída de material refratário para que não ocorra um aquecimento excessivo de sua superfície, evitando o comprometimento da instrumentação próxima. Haverá também uma janela de pirex para permitir a visualização da chama.

No sistema proposto a alimentação de ar e combustível é independente do sistema de controle. Futuramente um funcionamento integrado via computador é desejável, visto que permite que os parâmetros de operação do sistema de combustão sejam também controlados ativamente e permitindo um controle de estabilidade de melhor performance.

A Figura 3.1 a seguir mostra uma representação esquemática tridimensional da câmara de combustão.



Figura 3.1 - *Modelo tridimensional da câmara de combustão a ser construída (fora de escala).*

Na Figura 3.2 é mostrado o esquema de alimentação de combustível e comburente.

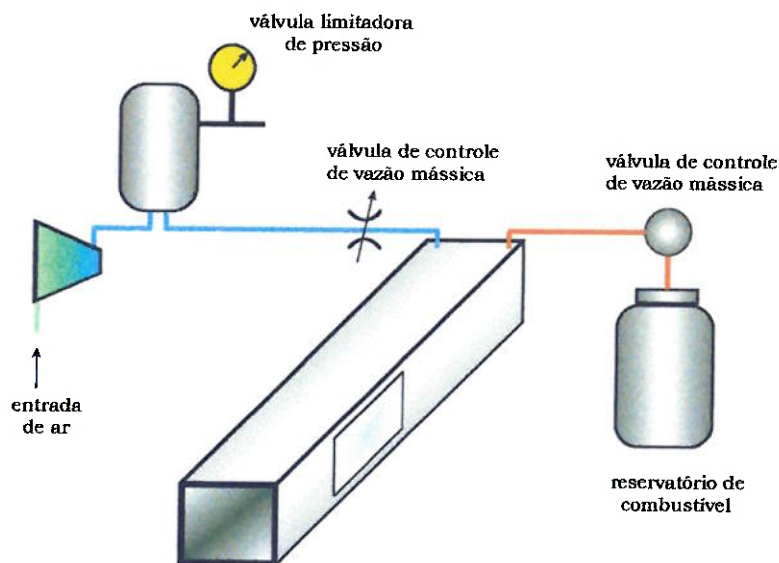


Figura 3.2 - Diagrama esquemático do sistema de alimentação de ar e combustível.

Foi adquirido para a construção do protótipo 1 botijão de gás, cerca de 30 metros de mangueira para transporte de gás combustível, ar e água para refrigeração, válvulas para controle de vazão tanto do GLP quanto para o ar e conectores. Para o sensoreamento e atuação sobre o sistema foram utilizados equipamentos já disponíveis no departamento tais como placa CAD/CDA 12 bits, computador Pentium 166 32 Mb RAM, microfone de lapela e alto-falante.

O projeto da câmara de combustão levou como fatores para seu dimensionamento o posicionamento de sensores e atuadores relativamente a estrutura modal da câmara (de modo a garantir que o sistema seja observável e controlável), a velocidade de queima no *flame holder*, velocidade de escoamento na alimentação. Definiu-se também que a região onde ocorre a queima propriamente dita deveria ser resfriada para garantir a integridade do sensor (que foi posicionado para ler o sinal de pressão na posição da chama).

Com base nas considerações acima chegou-se a uma configuração de fácil construção mostrada nos desenhos de fabricação a seguir:

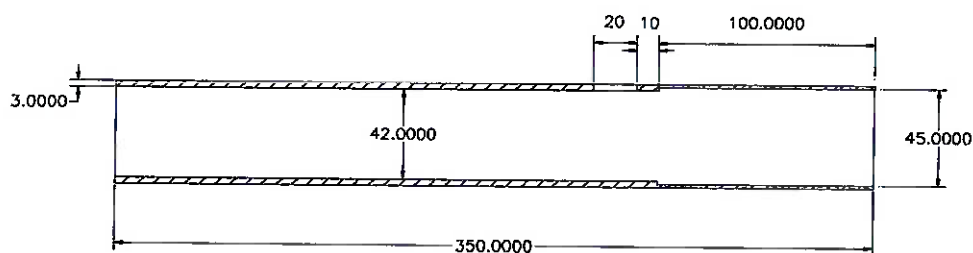


Figura 3.3 - Desenho de fabricação da câmara de queima.

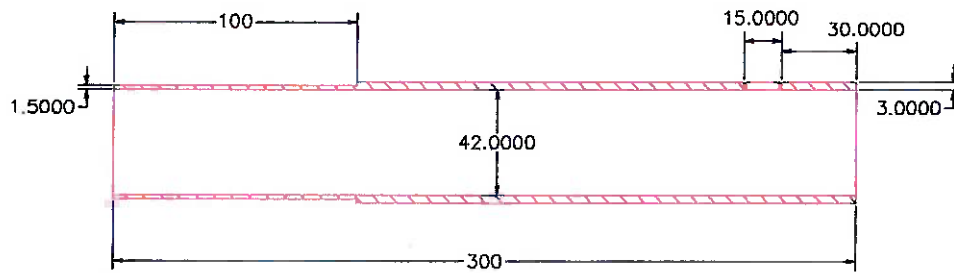


Figura 3.4 - *Desenho de fabricação da câmara de mistura.*

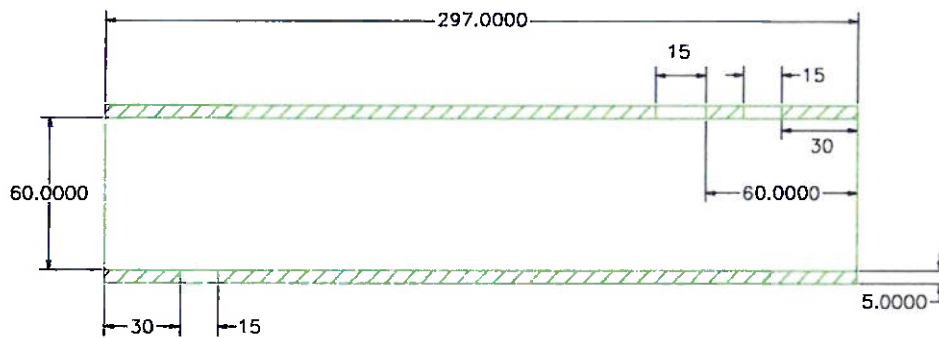


Figura 3.5 - *Desenho de fabricação da câmara de resfriamento.*

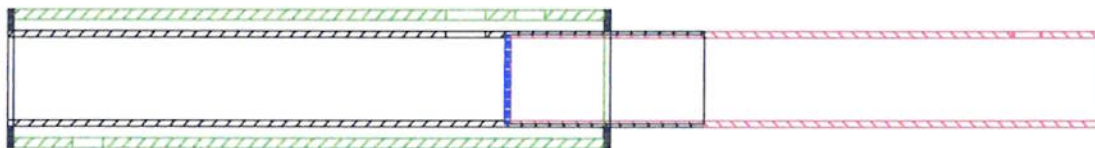


Figura 3.6 - *Desenho de conjunto da câmara montada.*

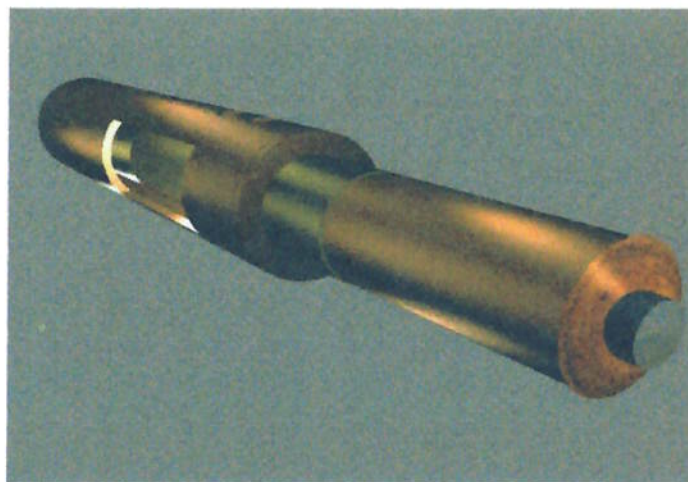


Figura 3.7 - *Modelo renderizado da câmara de combustão.*

Para injeção dos gases combustíveis, ar e água utilizou-se conectores de 3/8" com rosca padrão npt (cônica). Foi instalada também uma janela de pirex (para resistir ao calor) atravessando a câmara de resfriamento e de queima

com o objetivo de permitir a visualização da chama. A câmara de queima e de resfriamento foram soldadas após a montagem utilizando-se solda latão por meio da combustão de oxi-acetileno.

3.2. Parte Eletrônica

O sistema de controle de combustão consiste em um sensor, que envia o sinal para o computador, este lê o sinal, gera o sinal de atuação que por sua vez é enviado para o alto-falante. Tal modelo lógico é mostrado com mais detalhes no seguinte diagrama de blocos:

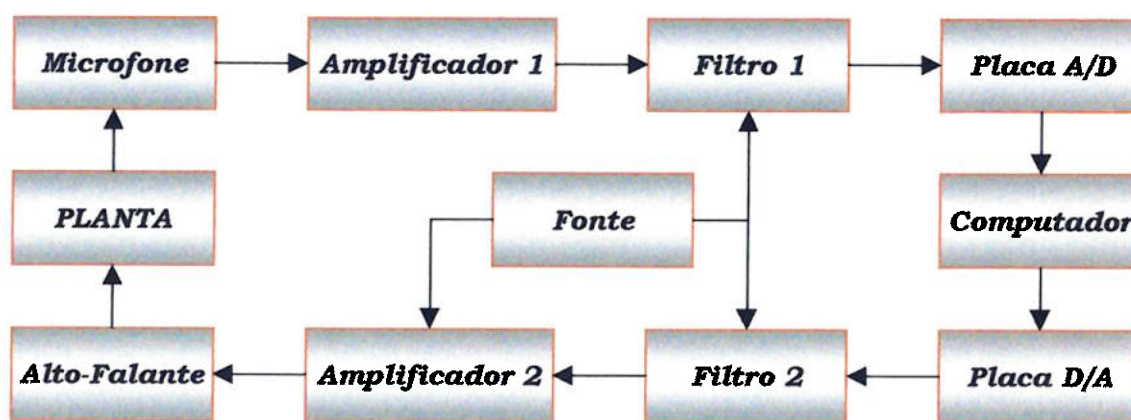


Figura 3.8 - Diagrama de blocos do sistema eletrônico de controle.

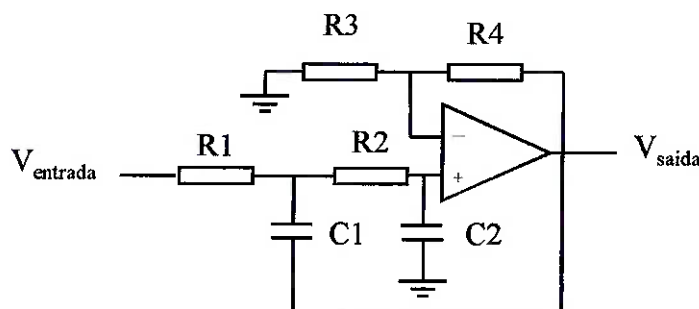


Figura 3.9 - Diagrama de blocos dos filtros 1 e 2 (Sallen Key de 2ª ordem).

3.2.1. Análise dos Filtros

Os filtros foram introduzidos por três razões principais:

1. Aumentar a impedância de entrada do circuito;
2. Amplificar o sinal; e

3. Atenuar componentes de frequência acima da frequência de Nyquist (metade da frequência de amostragem).

Os filtros acima são do tipo Sallen Key de 2ª ordem (decaimento de 40 dB/década para frequências acima da frequência crítica). Foram escolhidos por sua simplicidade (utiliza um único amplificador operacional) e versatilidade (utilizando resistores variáveis permite ajuste do ganho, frequência crítica e amortecimento).

As relações válidas para estes filtros são:

$$ganho = 1 + \frac{R4}{R3} \quad (3.1)$$

$$f_{crítica} = \frac{1}{2\pi\sqrt{R1 \cdot C1 \cdot R2 \cdot C2}} \quad (3.2)$$

$$\zeta = \frac{R1 + R2}{2} \sqrt{\frac{C2}{R1 \cdot R2 \cdot C1}} \quad (3.3)$$

Os valores de C1 e C2 foram 0,1 μ F e 0,22 μ F, respectivamente. Os valores das resistências foram encontrados através do uso das equações acima fazendo com que os ganhos fossem unitários, a frequência crítica de 300 Hz e fator de amortecimento com valor 0,707.

3.3. Considerações sobre o combustível

O combustível empregado será o gás liquefeito de petróleo comercial (GLP). Ele é constituído basicamente de propano e butano, embora existam outras substâncias em quantidades pequenas como propenos, butenos, compostos de enxofre e outras. O GLP é obtido através de separação das frações mais leves do petróleo como também das frações mais pesadas do gás natural (este constituído principalmente de metano e etano).

À pressão atmosférica e temperaturas próximas a do ambiente o GLP é um gás inflamável, inodoro e asfíxiante, quando aspirado em altas concentrações. Comercialmente o GLP é armazenado na forma líquida, submetido a uma pressão (pressão de vapor) de aproximadamente 1,5 MPa a temperatura ambiente (aproximadamente 25°C). Usualmente o GLP é fornecido em botijões de 2, 5 e 13 kg e em cilindros de 45 kg.

A pressão do gás proveniente do botijão diminui a medida em que este se esvazia, pois é o GLP , como já mencionado, é constituído por uma mistura de substâncias. Assim, a fração de butano (cuja pressão de vapor é mais baixa) aumenta conforme se esvazia o botijão diminuindo a pressão de vapor da mistura.

Caso o botijão estivesse preenchido por uma substância pura a pressão no interior do botijão permaneceria constante visto que o líquido se encontra saturado com o gás e sabe-se da termodinâmica clássica que a pressão para uma substância pura saturada depende apenas da temperatura.

Esta característica de variação da pressão de armazenamento do gás que alimenta a câmara de combustão, bem como de sua composição pode ser explorada por um controlador adaptativo de forma a assegurar boa performance em qualquer condição de enchimento do botijão.

4. TESTES

Utilizando o aparato experimental descrito na seção anterior realizou-se diversos testes sobre o protótipo, o primeiro mostra a resposta do sistema em malha aberta.

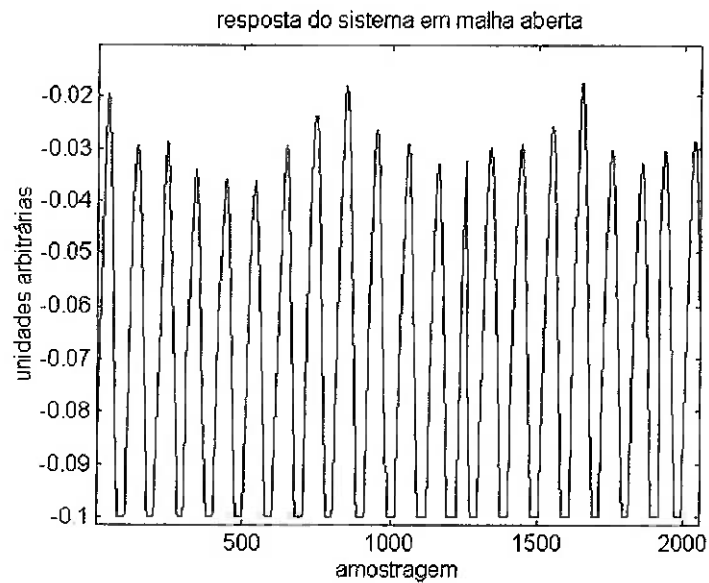


Figura 4.1 - Resposta do sistema físico em malha aberta. Oscilação corresponde a um ciclo limite.

5. CONCLUSÕES E ESTUDO FUTURO

Foi realizada uma modelagem de um sistema de combustão utilizando-se um modelo de perturbação. Para o modelo proposto foram verificadas a estabilidade e a possibilidade de controle ativo, bem como considerações sobre a construção de um protótipo em escala reduzida para testes reais.

O modelo da planta foi simulado em malha aberta, verificando-se sua instabilidade através de simulação. Projetou-se um compensador através da análise do lugar das raízes e posteriormente ajustou-se o ganho de forma a atingir a estabilidade. A simulação do sistema em malha fechada mostrou que o sistema se estabiliza para uma entrada degrau unitário como perturbação em cerca de 0,2s.

Admitindo-se que o modelo constitui-se numa boa representação do sistema real verifica-se que o controle ativo de instabilidade em combustão é viável.

Foi feito um estudo sobre controlabilidade e observabilidade do sistema. Posteriormente será feita uma análise mais rigorosa da controlabilidade e observabilidade do sistema para a presença de vários modos, bem como da melhoria do controlador de forma a minimizar o esforço requerido para se atingir a estabilização. Também está previsto o ajuste dos parâmetros remanescentes para a especificação de construção do protótipo.

O aparato experimental foi testado para verificar o funcionamento das partes mecânicas e eletrônicas. O funcionamento do sistema de alimentação de ar e de combustível, resfriamento, sensoriamento, filtragem e atuação do sistema foram checados e estão funcionando. Entretanto até o momento desta impressão ainda não foram obtidos os resultados esperados, por algumas dificuldades de implementação do algoritmo de controle. Este problema deverá ser sanado em breve e novos resultados serão anexados a este trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Annaswamy, A.M., Ghoniem, A.F., **Active Control in Combustion Systems**, IEEE Control Systems, 15(6):49-63, 1995.
- [2] Astrom, K.J., Wittenmark, **Adaptive Control**, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.
- [3] Billoud, G., Galand, M.A., Huu, C.H., Candel, S.M., **Adaptive Active Control of Combustion Instabilities**, Combustion Science and Technology, 81:257-283, 1992.
- [4] Crocco, L., Cheng, S.L., **Theory of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors**, Butterworths Science Publication, 1956.
- [5] Culick, F.E.C., **Nonlinear Behavior of Acoustic Waves in Combustion Chambers**, Acta Astronautica, 3:715-756, 1976.
- [6] Fung, Y-T., Yang, V., Sinha, A., **Active Control of Combustion Instabilities with Distributed Actuators**, Combustion Science and Technology, 78:217-245, 1991.
- [7] Gutmark, E., Parr, T.P., Hanson-Parr, D.M., Schadow, K.C., **Stabilization of a Premixed Flame by Shear Flow Excitation**, Combustion Science and Technology, 73:521-535, 1990.
- [8] Gutmark, E., Parr, T.P., Hanson-Parr, D.M., Schadow, K.C., **Closed-Loop Control in a Flame and a Dump Combustor**, IEEE Control Systems, 13(2):73-78, 1993.
- [9] Herman, J., Gleis, S., Vortmeyer, D., **Active Instability Control (AIC) of Spray Combustors by Modulation of the Liquid Fuel Flow Rate**, Combustion Science and Technology, 118:1-25, 1996.

- [10] Lang, W., Poinso, T., Candel, S.M., **Active Control of Combustion Instability**, Combustion and Flame, 70:281-289, 1987.
- [11] McManus, K.R., Poinso, T., Candel, S.M., **A Review of Active Control of Combustion Instabilities**, Progress in Energy and Combustion Science, 19(1):1-30, 1993.
- [12] McManus, K.R., Vandsbuger, U., Bowman, C.T., **Combustion Performance Enhancement Through Direct Shear Layer Excitation**, Combustion and Flame, 82:75-92, 1990.
- [13] Menon, S., Active Combustion Control in a Ramjet Using Large-eddy Simulations, Combustion Science and Technology, 84:51-79, 1992.
- [14] Ogata, K., **Modern Control Engineering**, Second Edition, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [15] Padmanabhan, K.T., Bowman, C.T., Powell, J.D., **An Adaptive Optimal Combustion Control Strategy**, Combustion and Flame, 100:101-110, 1995.
- [16] Rayleigh, J.W.S., **The Theory of Sound**, vol.2, Dover, NY, 1945, pp. 227-235.
- [17] Schadow, K.C., Gutmark, E., Wilson, K.J., **Active Combustion Control in a Coaxial Dump Combustor**, Combustion Science and Technology, 81:285-300, 1992.
- [18] Widrow, B., Stearns, S.D., **Adaptive Signal Processing**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1985.
- [19] Willians, F.A., **Combustion Theory**, Second Edition, Benjamin/Cummings Publishing Co., 1985.

ANEXO 1 - MODELAGEM DO SISTEMA COM ATRASO

Este fragmento tem como objetivo aprofundar a modelagem do sistema, estabelecendo condições para o aparecimento de instabilidade termoacústica utilizando-se desta vez o modelo de *time-lag* para o efeito do campo acústico sobre o processo de combustão.

Como descrito no texto anterior a equação que governa o comportamento do sistema é uma equação de onda perturbada. Existem condições iniciais e condições de contorno associadas ao problema.

Uma vez que o sistema é forçado (devido a fonte de calor), despreza-se a contribuição das condições iniciais, visto que, devido ao amortecimento presente no sistema, os termos correspondentes a solução da equação homogênea tendem para zero.

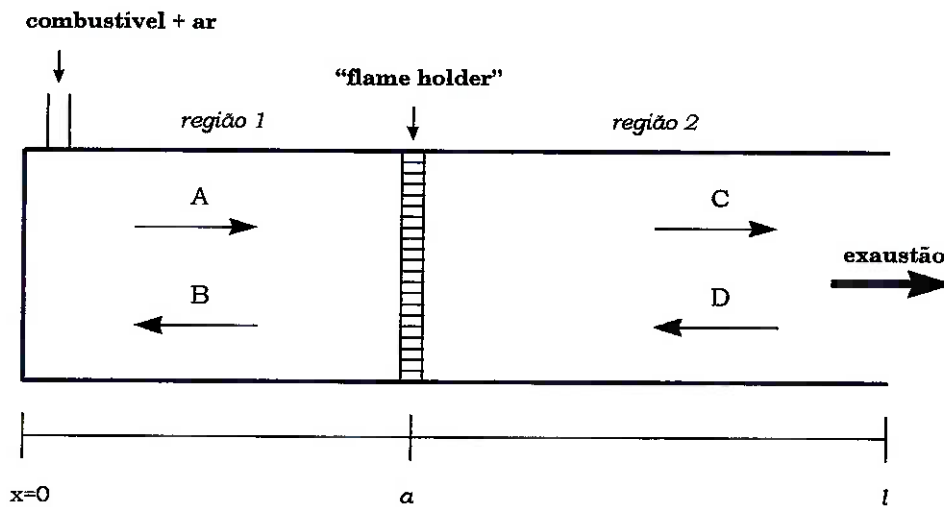


Figura a.1 - Diagrama esquemático da geometria do modelo.

A forma adotada de solução da equação de onda é a soma de termos formados pelo produto de uma função dependente de x e outra função dependente apenas de t :

$$p'(x,t) = \bar{p} \cdot \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \cdot \eta_i(t) \quad (\text{a.1})$$

$$u'(x,t) = \frac{1}{\gamma} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i^2} \cdot \frac{d\psi_i}{dx}(x) \cdot \dot{\eta}_i(t). \quad (\text{a.2})$$

Estas equações mostram que os campos de pressão e velocidade podem ser aproximados pela superposição de um determinado número de ondas estacionárias.

Uma onda estacionária pode ser escrita também na forma da soma de duas ondas de mesma frequência se propagando em sentidos opostos. Se as amplitudes de tais ondas não forem iguais, obtém-se não uma mas duas ondas estacionárias de mesma frequência. Utilizando-se a notação complexa e omitindo a indicação de que a parte real é que deve ser considerada na definição das grandezas é possível escrever:

$$p'_1(x, t) = A \cdot e^{ik_1(x-a) - i\omega t} + B \cdot e^{-ik_1(x-a) - i\omega t} \quad (\text{a.3})$$

$$p'_2(x, t) = C \cdot e^{ik_2(x-a) - i\omega t} + D \cdot e^{-ik_2(x-a) - i\omega t} \quad (\text{a.4})$$

$$u'_1(x, t) = \frac{1}{\bar{\rho}_1 \cdot \bar{c}_1} \cdot (A \cdot e^{ik_1(x-a) - i\omega t} - B \cdot e^{-ik_1(x-a) - i\omega t}) \quad (\text{a.5})$$

$$u'_2(x, t) = \frac{1}{\bar{\rho}_2 \cdot \bar{c}_2} \cdot (C \cdot e^{ik_2(x-a) - i\omega t} - D \cdot e^{-ik_2(x-a) - i\omega t}) \quad (\text{a.6})$$

onde $k_i = \omega / \bar{c}_i$.

Como condições de contorno para este problema assume-se que $x = 0$ é um nó e que $x = l$ é um antinó assim:

$$u'_1(0, t) = 0 \quad (\text{a.7})$$

$$p'_2(l, t) = 0. \quad (\text{a.8})$$

Admitindo-se também a continuidade de pressão entre as duas regiões tem-se:

$$p'_1(a_-, t) = p'_2(a_+, t). \quad (\text{a.9})$$

A substituição das condições de contorno (a.7) - (a.9) nas equações (a.3) - (a.5) fornece as seguintes relações:

$$A \cdot e^{-ik_1 a} - B \cdot e^{ik_1 a} = 0 \quad (\text{a.10})$$

$$C \cdot e^{ik_2(l-a)} + D \cdot e^{-ik_2(l-a)} = 0 \quad (\text{a.11})$$

$$A + B = C + D. \quad (\text{a.12})$$

A liberação de calor em $x = a$ pode ser modelada como uma descontinuidade no campo de velocidade devido à rápida expansão dos gases, assim:

$$u'_2(a_+, t) - u'_1(a_-, t) = \frac{\gamma - 1}{\bar{\rho}_1 \cdot \bar{c}_1^2} \cdot q'_0(t). \quad (\text{a.13})$$

Esta última equação fornece:

$$\frac{1}{\bar{\rho}_2 \cdot \bar{c}_2} \cdot (C \cdot e^{-i\omega t} - D \cdot e^{-i\omega t}) - \frac{1}{\bar{\rho}_1 \cdot \bar{c}_1} \cdot (A \cdot e^{-i\omega t} - B \cdot e^{-i\omega t}) = \frac{\gamma - 1}{\bar{\rho}_1 \cdot \bar{c}_1^2} \cdot q'_0(t). \quad (\text{a.14})$$

Com base na hipótese de que é possível escrever

$$q'_0(t) = Q \cdot e^{-i\omega t} \quad (\text{a.15})$$

tem-se:

$$\xi \cdot (C - D) - (A - B) = \frac{\gamma - 1}{\bar{c}_1} \cdot Q_0, \quad (\text{a.16})$$

onde $\xi = (\rho_1 \cdot \bar{c}_1) / (\rho_2 \cdot \bar{c}_2)$ é chamada de razão de impedância acústica específica.

Para completar é necessário uma equação que forneça a influência do campo acústico sobre o processo combustão. Esta influência é muito complexa e uma análise simplificada que tem sido utilizada é através do uso do modelo de *time-lag*. Esta relação é expressa do seguinte modo:

$$\frac{\gamma - 1}{\bar{\rho}_1 \cdot \bar{c}_1^2} \cdot q'_0(t) = n \cdot u'_1(a, t - \tau) = n \cdot e^{i\omega\tau} \cdot u'_1(a, t), \quad (\text{a.17})$$

sendo que n representa esta relacionada à intensidade de calor gerado e τ ao atraso entre a liberação de calor e a variação de velocidade.

Utilizando as relações (a.5), (a.15) e (a.17) obtém-se:

$$\frac{\gamma - 1}{\bar{c}_1} \cdot Q_0 = n \cdot (A - B) \cdot e^{i\omega\tau}. \quad (\text{a.18})$$

A substituição da equação (a.18) na equação (a.16) fornece:

$$\xi \cdot (C - D) - (A - B) \cdot (1 + n \cdot e^{i\omega\tau}) = 0 \quad (\text{a.19})$$

As equações (a.10), (a.11), (a.12) e (a.19) fornecem as informações necessárias para se obter as amplitudes das ondas sonoras. Estas relações podem ser colocadas na forma matricial como segue:

$$\begin{pmatrix} -1 - n \cdot e^{i\omega\tau} & 1 + n \cdot e^{i\omega\tau} & \xi & -\xi \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ e^{-ik_1 a} & -e^{ik_1 a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_2 b} & e^{-ik_2 b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{a.20})$$

onde $b = l - a$.

Para que o sistema acima (que é homogêneo) admita soluções outras que não a solução trivial $A = B = C = D = 0$ o determinante da matriz acima deve ser nulo. Após algumas manipulações algébricas tem-se:

$$\xi \cdot \cos(k_1 \cdot a) \cdot \cos(k_2 \cdot b) - \sin(k_1 \cdot a) \cdot \sin(k_2 \cdot b) \cdot (1 + n \cdot e^{i\omega\tau}) = 0. \quad (\text{a.21})$$

Para cada valor de n e τ haverá valores de ω que satisfazem a equação acima. O sistema será instável se $\text{Im}(\omega) > 0$, pois para qualquer grandeza φ do sistema (liberação de calor, pressão e velocidade) tem-se $\varphi' = \varphi \cdot e^{-i\omega t}$. Logo o crescimento será exponencial se a parte imaginária for positiva e a frequência da instabilidade será dada pela parte real de ω .

A equação (a.21) é de difícil solução analítica no caso geral, porém pode ser consideravelmente simplificada pelo uso de alguma hipóteses adicionais. Portanto no que segue será assumido que:

$$a = b \quad \bar{c}_1 = \bar{c}_2 = c \quad \bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_2 \quad (\xi = 1). \quad (\text{a.22})$$

Estas hipóteses não se justificam em termos reais, foram inseridas apenas com o propósito de resolver o problema analiticamente. Para a resolução do caso geral o uso de métodos numéricos parece ser uma boa alternativa.

A equação (a.21) torna-se:

$$\cos(2ka) - \sin^2(ka) \cdot n \cdot e^{i\omega\tau} = 0, \quad (\text{a.23})$$

lembrando-se da identidade trigonométrica:

$$\sin^2(ka) = \frac{1 - \cos(2ka)}{2} \quad (\text{a.24})$$

e resolvendo para $\cos(2ka)$ obtém-se:

$$\cos(2ka) = \frac{n \cdot e^{i\omega\tau}}{2 + n \cdot e^{i\omega\tau}}, \quad (\text{a.25})$$

multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador tem-se:

$$\cos(2ka) = \frac{\frac{1}{2} \cdot n \cdot e^{i\omega\tau} + \left(\frac{n}{2}\right)^2}{1 + n \cdot \cos(\omega\tau) + \left(\frac{n}{2}\right)^2}, \quad (\text{a.26})$$

se $n \ll 1$ então:

$$\cos(2ka) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot e^{i\omega\tau} \quad (\text{a.27})$$

Para se resolver o problema primeiramente admite-se a ausência de combustão de modo que $n = 0$ e posteriormente considerar valores de n diferentes de zero de modo a considerar o efeito da combustão. Quando não há combustão a equação (2.27) torna-se:

$$\cos(2ka) = 0. \quad (\text{a.28})$$

As soluções desta equação são:

$$k_i = \frac{(2 \cdot i + 1) \cdot \pi}{4 \cdot a}. \quad (\text{a.29})$$

Estes valores de k correspondem aos modos naturais de vibração acústica no interior do tubo.